

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
FIZIČKI ODSJEK

Ante Ravlić

Uhvat elektrona u atomskoj jezgri u okviru relativističkog  
funkcionala gustoće

Diplomski rad

Zagreb, 2019.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
FIZIČKI ODSJEK

INTEGRIRANI PREDDIPLOMSKI I DIPLOMSKI SVEUČILIŠNI STUDIJ  
FIZIKA; SMJER ISTRAŽIVAČKI

**Ante Ravlić**

Diplomski rad

**Uhvat elektrona u atomskoj jezgri u okviru  
relativističkog funkcionala gustoće**

Voditelj diplomskog rada: prof. dr. sc. Nils Paar

Ocjena diplomskog rada: \_\_\_\_\_

Povjerenstvo: 1. \_\_\_\_\_

2. \_\_\_\_\_

3. \_\_\_\_\_

Datum polaganja: \_\_\_\_\_

Zagreb, 2019.

*Mojim roditeljima, hvala na beskonačnoj potpori !*

Zahvaljujem mentoru prof. dr. sc. Nilsu Paaruu na uloženom vremenu, savjetima i spremnosti da odgovori na sva moja pitanja. Također, zahvaljujem kolegici dr. sc. Esri Yüksel na pomoći pri konstrukciji kodova potrebnih za izradu ovog rada.

## Sažetak

U okviru ovog rada razvijen je teorijski formalizam za opis nuklearnih procesa slabog međudjelovanja koji se odvijaju u unutrašnjosti zvijezde u fazi koja prethodi eksploziji supernove. Proučavali smo proces uhvata elektrona na atomskim jezgrama koji je posebice važan za dinamiku kolapsa zvijezde. Naime, degenerirani elektronski plin pruža protutežu gravitacijskoj sili. Reakcijama uhvata elektrona smanjuje se broj elektrona, a time i tlak koji može proizvesti degenerirani elektronski plin, te također dolazi do povećanja broja neutrona u jezgrama. Za opis osnovnog stanja jezgara koristimo relativističku teoriju srednjeg polja na konačnoj temperaturi, sa uključenim korelacijama sparivanja nukleona. Istražili smo doprinose konačne temperature i korelacija sparivanja na svojstva jezgara i nuklearnih procesa u kojima te jezgre sudjeluju, u rasponu temperatura od  $T = 0$  MeV do  $T \sim 2$  MeV. Unutar tog raspona temperatura događa se fazni prijelaz nuklearnih jezgara iz supratekućeg u normalno stanje, a gornja granica se nalazi ispod temperature pri kojoj doprinosi nukleonskog plina postaju značajni. Relevantne nuklearne prijelaze opisujemo u okviru relativističke kvazičestične aproksimacije slučajne faze koja je razvijena za slučaj konačne temperature. Ujedinjavanjem modela za opis nuklearnog osnovnog stanja, relevantnih nuklearnih prijelaza i udarnih presjeka za uhvat elektrona, uspostavili smo jedinstveni teorijski okvir za istraživanje stopa uhvata elektrona na jezgrama koje su zastupljene u unutrašnjosti zvijezde, u uvjetima koji prethode eksploziji supernove.

**Ključne riječi:** Relativistička teorija srednjeg polja, Relativistička kvazičestična aproksimacija slučajne faze, uhvat elektrona, efekti konačne temperature, korelacije sparivanja

# Electron capture in atomic nucleus based on the relativistic energy density functional

## Abstract

In this work we have developed theoretical framework for description of nuclear processes mediated by weak interaction in presupernova stars. We study electron capture on atomic nuclei that is especially important for stellar collapse dynamics. Degenerate electron gas is providing balance against the force of gravity. The electron capture is lowering the number of available electrons and hence also degeneracy pressure, together with increasing the number of neutrons in atomic nuclei. For description of nuclear ground state we have developed relativistic mean field theory at finite temperature, including pairing correlations between nucleons. Effects of finite temperature and pairing correlations on atomic nuclei are studied, in temperature interval between  $T = 0$  MeV and  $T \sim 2$  MeV. This interval includes phase transition of nuclei from superfluid to normal state, and upper limit is well below the temperature where contribution from nucleon gas is significant. Relevant nuclear transitions are described using finite temperature relativistic quasiparticle random phase approximation. Unifying nuclear models for description of the ground state, nuclear transitions and electron capture cross sections, we have developed a consistent theoretical description of electron capture rates on nuclei that are abundant in the cores of presupernova stars.

**Keywords:** Relativistic mean field theory, Relativistic quasiparticle random phase approximation, electron capture, finite temperature effects, pairing correlations

# Sadržaj

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Hartree BCS teorija na konačnoj temperaturi</b>	<b>7</b>
2.1	Energijski funkcional gustoće . . . . .	7
2.2	Relativistička teorija srednjeg polja . . . . .	9
2.3	Hartree BCS teorija na konačnoj temperaturi . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Aproksimacija slučajne faze (RPA)</b>	<b>20</b>
3.1	Relativistička aproksimacija slučajne faze (RRPA) . . . . .	20
3.2	Relativistička kvazičestična aproksimacija slučajne faze na konačnoj temperaturi (FT-RQRPA) . . . . .	24
<b>4</b>	<b>Teorija uhvata elektrona na atomskim jezgrama</b>	<b>32</b>
4.1	Sačuvana vektorska struja (CVC) . . . . .	34
4.2	Doprinos pionskog pola . . . . .	35
4.3	Goldberger-Treiman relacija . . . . .	36
4.4	Izvod izraza za udarni presjek . . . . .	37
<b>5</b>	<b>Numerička implementacija</b>	<b>41</b>
<b>6</b>	<b>Rezultati</b>	<b>44</b>
6.1	Analiza uhvata elektrona na jezgrama $^{54}\text{Fe}$ i $^{56}\text{Fe}$ . . . . .	44
6.1.1	Gamow-Teller spektar prijelazne snage . . . . .	44
6.1.2	Udarni presjeci uhvata elektrona . . . . .	52
6.1.3	Stope uhvata elektrona . . . . .	58
6.2	Analiza uhvata elektrona na jezgrama $^{76}\text{Ge}$ i $^{78}\text{Ge}$ . . . . .	62
6.2.1	Gamow-Teller spektar prijelazne snage . . . . .	62
6.2.2	Udarni presjeci uhvata elektrona . . . . .	68
6.2.3	Stope uhvata elektrona . . . . .	71
<b>7</b>	<b>Zaključak</b>	<b>74</b>
	<b>Dodaci</b>	<b>76</b>
<b>A</b>	<b>Izvodi kod teorije uhvata elektrona</b>	<b>76</b>
A.1	Razvoj po multipolima . . . . .	76
A.2	Sređivanje izraza za matrični element . . . . .	79
A.3	Leptonski tragovi . . . . .	81

A.4	Nukleonski matrični elementi . . . . .	85
<b>B</b>	<b>Izvod rezidualne interakcije i matričnih elemenata za DD-ME interakciju</b>	<b>95</b>
B.1	Izvod rezidualne interakcije . . . . .	95
B.1.1	$\sigma$ -mezon . . . . .	95
B.1.2	$\omega$ -mezon . . . . .	97
B.1.3	$\rho$ -mezon . . . . .	98
B.2	Izvod matričnih elemenata za DD-ME interakciju . . . . .	100
B.2.1	Izoskalarni-skalarni član . . . . .	100
B.2.2	Izoskalarni-vektorski član . . . . .	107
B.2.3	Prostornolika komponenta . . . . .	107
B.2.4	Vremenolika komponenta . . . . .	110
B.2.5	Kontaktni član . . . . .	112
B.2.6	Izvod rezidualne interakcije sparivanja . . . . .	116
	<b>Literatura</b>	<b>119</b>

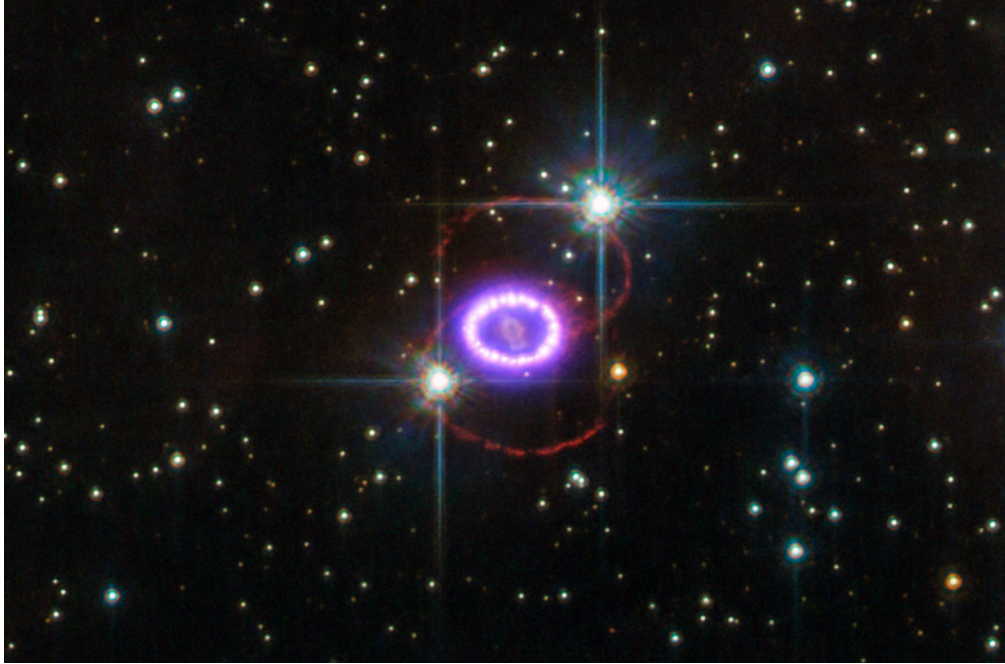
# 1 Uvod

Nuklearna astrofizika je interdisciplinarno područje istraživanja koje ujedinjuje nuklearnu fiziku i astrofiziku. Cilj istraživanja je prvenstveno proučavanje i modeliranje nuklearnih reakcija koje se odvijaju u astrofizičkim uvjetima. Primjeri toga su nukleosinteza, nuklearni procesi u zvijezdama, istraživanje i modeliranje nuklearnih reakcija u supernovama i brojni drugi. Jedan od povijesno najznačajnijih članaka u ovom području je Burbidge, Burbidge, Fowler i Hoyle o nukleosintezi u zvijezdama [1]. Danas imamo brojne sofisticirane modele nastanka kemijskih elemenata u svemiru, no i dalje nemamo odgovore na sva ključna pitanja. Poznati primjeri su problem  ${}^7\text{Li}$ , kojeg ima znatno manje nego prema postojećim teorijskim proračunima primordijalne nukleosinteze [2], te mehanizam eksplozije supernova. Nuklearna astrofizika zahtjeva izuzetno poznavanje nuklearnih reakcija, s teorijske i eksperimentalne strane. Teorijski modeli se uglavnom zasnivaju na eksperimentalnim podacima, a nedostatak istih vodi na nekonzistentnosti. Otvaranjem novih eksperimentalnih postrojenja i razvitkom sofisticiranih teorijskih modela u skorijoj budućnosti se očekuju znatni pomaci. Kao što je već rečeno, jedna od glavnih tema nuklearne astrofizike je proučavanje nuklearnih reakcija koje se odvijaju u supernovama, odnosno eksplozijama masivnih zvijezda na kraju njihovog životnog ciklusa.

Supernova predstavlja jednu od najdramatičnijih pojava u našem svemiru. Tijekom eksplozije supernove oslobađa se velika količina energije, najviše u obliku neutrina, te se sadržaj unutrašnjosti zvijezde raspršuje u međuzvjezdani medij. Istraživanja pokazuju da su supernove jedan od važnih mehanizama nukleosinteze elemenata težih od željeza, zajedno sa sudarima neutronske zvijezde [2]. Modeliranje supernova uključuje sve četiri fundamentalne sile prirode. Jaka nuklearna i elektromagnetska sila su posebice važne kod ranih stadija evolucije zvijezde, dok je kolaps sredice natjecanje između slabe nuklearne sile i gravitacije. Posebno je zanimljivo da kod mehanizma supernove susrećemo izravnu dinamiku između jedne od najjačih i najslabije sile u prirodi. Vidimo da mehanizam supernove pruža idealne uvjete za razvoj brojnih teorijskih modela, koji su važni i za astrofiziku i za nuklearnu fiziku. Jedan od pionirskih radova u ovom području je članak Hansa Bethea [3], u kojem je dan jedan od prvih pregleda dotadašnjih simulacija supernova, te fizike koja ih opisuje. Jedan od glavnih zaključaka jest da je mehanizam razvoja zvijezde pred sam kolaps sredice diktiran entropijom sredice, te omjerom broja elektrona i bariona ( $Y_e$ ). Omjer broja elektrona i bariona je i veličina direktno proporcionalna Chandrasekharovoj masi ( $M_{ch} \sim Y_e^2$ ) [2, 4]. Chandrasekharova masa je najveća



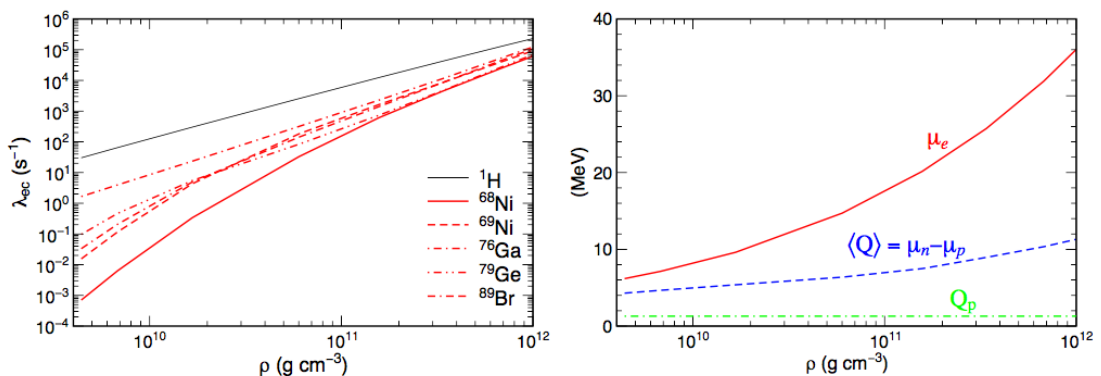
masa sredice zvijezde koja se može oduprijeti daljnjem gravitacijskom kolapsu sredice u neutronske zvijezde ili u ekstremnijim slučajevima u crnu rupu. Nastanak željeza, kao jezgre s najvećom energijom vezanja po nukleonu, označava kraj daljnje fuzije u zvijezdama. Daljnje vezanje na željezo bi bilo okarakterizirano negativnim  $Q$ -vrijednostima i zvijezda bi gubila energiju. Ukoliko je tada masa sredice veća od  $M_{Ch} \sim 1.44$  sunčeve mase ( $M_{\odot}$ ) degenerirani elektronski plin se ne može oduprijeti gravitacijskoj sili i dolazi do kolapsa. U modeliranju supernovi značajno je pomoglo promatranje supernove SN1987A, koja je eksplodirala u našoj satelitskoj galaksiji Velikom Magellanovom oblaku, u neposrednoj blizini. Opservacije toka neutrina, te kontinuirano praćenje razvoja ove supernove omogućilo je bolje razumijevanje dinamike ovih fascinantnih pojava. Supernova SN1987A se nalazi na slici (1.1) koja je dobivena kombiniranjem slika iz optičkog i X-dijela spektra.



Slika 1.1: Supernova SN1987A, kao kombinacija optičkog i  $X$ -dijela spektra. Nalazi se u Velikom Magellanovom oblaku, otprilike 160000 svjetlosnih godina od nas. Slika je preuzeta sa [5].

Kao što je već rečeno, dinamika kolapsa je usko povezana sa omjerom broja elektrona i bariona ( $Y_e$ ) i entropijom sredice, a te veličine su diktirane reakcijama slabom silom, poput uhvata elektrona i  $\beta$ -raspada. Reakcije uhvata elektrona vode na smanjivanje  $Y_e$ , te povećanje broja neutrona u jezgrama, što pak vodi na nastajanje jezgara bogatih neutronima. Za vrijeme početnog kolapsa uhvat elektrona se događa uglavnom na jezgrama u susjedstvu željeza [4, 6, 7]. Smanjivanje broja elektrona smanjuje otpor degeneriranog elektronskog plina daljnjem kolapsu, čime kolaps zvijezde ubrzava. Reakcijama uhvata

elektrona oslobađaju se neutrini koji odnose energiju iz sredice, čime se ona hladi, i smanjuje joj se entropija. Daljnjim kolapsom, povećava se gustoća unutar zvijezde čime reakcije neutrina sa nukleonima i jezgrama u unutrašnjosti zvijezde postaju sve značajnije. Jednom kada se dosegne gustoća od  $\rho \approx 10^{12} \text{ g/cm}^3$ , neutrini su efektivno zarobljeni u sredici, zbog sve intenzivnijih reakcija s nukleonima [4, 7]. Nakon zatočenja neutrina, kolaps sredice se nastavlja homologno (sonično) sve dok ne dođemo do gustoća koje su usporedive sa gustoćama nuklearne materije  $\rho_0 \approx 10^{14} \text{ g/cm}^3$ . Budući da nuklearna materija ima mnogo manju kompresibilnost od kolapsirajuće homologne jezgre, kolaps se usporava i odbija u suprotnom smjeru, čime nastaje udarni val koji se širi prema vanjskim slojevima zvijezde. Iako je za očekivati da ovaj udarni val vodi na eksploziju supernove, simulacije pokazuju da energija vala nije dovoljna da odnese vanjske slojeve zvijezde [4, 6, 7]. Naime, val širenjem gubi svoju energiju na disocijaciju nuklearnih jezgara na nukleone, čime on nije dostatan da odbaci vanjske slojeve, no disocijacija jezgara na pojedine nukleone vodi na važne promjene u dinamici nuklearnih reakcija. Dolazi do daljnje neutronizacije materije, reakcijama uhvata elektrona na slobodnim protonima, čime se oslobađaju velike količine elektronskih neutrina iz zvijezde [7]. Nakon odboja kolabirajuće materije od sredice, u njoj nastaje kompaktna protoneutronska zvijezda koja na sebe akrecijom veže materiju sve do konačne eksplozije supernove. Od protoneutronske zvijezde može nastati neutronska zvijezda, ili ako je masa zvijezde veća od  $\sim 25M_\odot$  crna rupa [7]. U današnjim teorijama mehanizma supernove, vjeruje se da do eksplozije dolazi nakon oživljavanja nastalog udarnog vala emisijom energijski bogatih neutrina nastalih razvojem protoneutronske zvijezde u sredici [4, 7]. Ponovno oživljeni udarni val će imati dovoljnu energiju da pokrene eksploziju i izbaci unutrašnjost zvijezde u međuzvjezdani medij. Ključne reakcije slabom silom kod kolapsa sredice su [6]



Slika 1.2: (lijevo) Ovisnost stopa uhvata elektrona  $\lambda_{ec}$  o gustoći unutar zvijezde  $\rho$ . Za veće gustoće uхват na jezgrama postaje usporediv s uхватom na slobodnim protonima. (desno) Usporedba kemijskog potencijala elektrona  $\mu_e$ , srednje  $Q$ -vrijednosti potrebne za uхват na jezgrama  $\langle Q \rangle$ , te za uхват na protonima  $Q_p$ . Slika je preuzeta iz [4].

$$p + e^- \rightleftharpoons n + \nu_e, \quad (1.1)$$

$$n + e^+ \rightleftharpoons p + \bar{\nu}_e, \quad (1.2)$$

$$(A, Z) + e^- \rightleftharpoons (A, Z-1) + \nu_e, \quad (1.3)$$

$$(A, Z) + e^+ \rightleftharpoons (A, Z+1) + \bar{\nu}_e, \quad (1.4)$$

$$\nu + N \rightleftharpoons \nu + N, \quad (1.5)$$

$$N + N \rightleftharpoons N + N + \nu + \bar{\nu}, \quad (1.6)$$

$$\nu + (A, Z) \rightleftharpoons \nu + (A, Z), \quad (1.7)$$

$$\nu + e^\pm \rightleftharpoons \nu + e^\pm, \quad (1.8)$$

$$\nu + (A, Z) \rightleftharpoons \nu + (A, Z)^*, \quad (1.9)$$

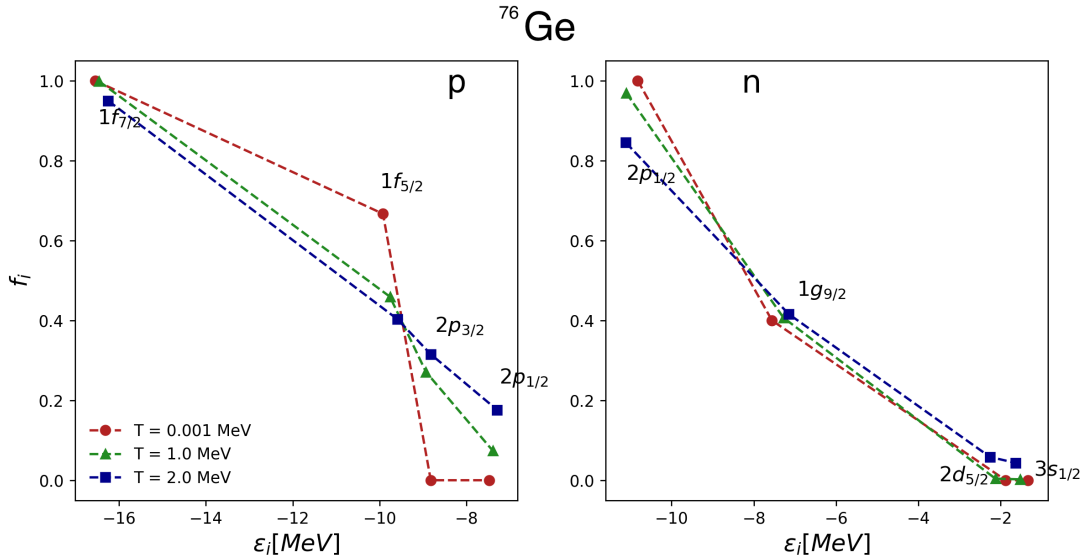
$$e^+ + e^- \rightleftharpoons \nu + \bar{\nu}, \quad (1.10)$$

$$(A, Z)^* \rightleftharpoons (A, Z) + \nu + \bar{\nu}. \quad (1.11)$$

Ukupan broj nukleona je označen s  $A$ ,  $Z$  je broj protona,  $N$  može biti neutron ili proton, a  $\nu$  i  $\bar{\nu}$  označavaju neutrine, odnosno antineutrine bilo kojeg okusa. U istraživanjima prije kompleksnih nuklearnih modela vjerovalo se da reakcija uhvata elektrona na slobodnim protonima (1.2) znatno dominira uhatom elektrona na jezgrama (1.4), zbog puno manje  $Q$ -vrijednosti i kulonske barijere za nastanak reakcije. Na slici (1.2) je prikazana ovisnost stopa uhvata elektrona za različite jezgre (lijevo), te usporedba kemijskog potencijala elektrona i  $Q$ -vrijednosti za reakciju (desno). Kao što se vidi sa slike, pri većim gustoćama u unutrašnjosti zvijezde, kemijski potencijal elektrona  $\mu_e$  raste znatno brže od  $Q$ -vrijednosti za najzastupljenije jezgre, čime uhvat na jezgrama postaje značajan [4]. Uхват elektrona je dominiran Fermi ( $S = 0$ ) i Gamow-Teller prijelazima ( $S = 1$ ). Formalizam Gamow-Teller prijelaza je mnogo kompliciraniji i uglavnom je tretiran raznim aproksimacijama u ranijim računima, a nekad i potpuno izostavljen. Proizvodnjom jezgara bogatijim neutronima, jednočestična stanja u modelu ljusaka postaju zauzeta, te daljnji prijelaz iz protonskog u neutronske stanje više neće biti moguć. No tu do izražaja dolazi efekt konačne temperature, koji mijenja zauzeća pojedinih jednočestičnih stanja i time omogućava dominantne Gamow-Teller prijelaze čak i za jezgre bogatije neutronima. Efekt tzv. *deblokiranja* energijskih nivoa je detaljno diskutiran u [8, 9]. Primjer termalnog deblokiranja prikazan je na slici (1.3). Vidimo da uvođenjem konačne temperature zauzeće neutronske stanja  $2p_{1/2}$  pada, čime Gamow-Teller prijelazi postaju mogući.

U ovom radu proučavamo reakciju uhvata elektrona na jezgrama (1.4), pri uvjetima koji

su vladali u unutrašnjosti zvijezde u fazi koja prethodi eksploziji supernove. Prvi izračuni stopa slabih interakcija su oni od Fullera, Fowlera i Newmana (FFN) [10–13]. Koji su izračunali reakcije uhvata elektrona, pozitrona,  $\beta$ -raspada i ostalih slabih reakcija za jezgre u rasponu  $A = 21 - 60$ . Izračuni su se zasnivali na tada dostupnim eksperimentalnim informacijama, te obuhvaćali prijelaze iz osnovnog u niskoležeća stanja u kontekstu modela nezavisnih čestica<sup>1</sup>. Još su FFN u svojim radovima prepoznali važnost efekta konačne temperature, koji je omogućio djelomična zauzeća nedostupnih pobuđenih stanja, koja su vrlo važna kasnije za ostvarivanje Gamow-Teller prijelaza. Bolje proračune uhvata elektrona u kontekstu dijagonalizacije Hamiltonijana unutar modela ljusaka<sup>2</sup> proveli su Langanke i Martinez-Pinedo [14]. Napravili su proračune za više od 100 jezgara u intervalu  $A = 45 - 65$  zahvaljujući naprednim kodovima za dijagonalizaciju velikog parametarskog prostora. Kasnije su napravljeni proračuni za približno 2700 jezgara u intervalu  $A = 45 - 110$  koristeći pristupe raznih mikroskopskih modela, i aproksimacije slučajne faze<sup>3</sup> [15]. Nedavno su napravljeni i prvi proračuni unutar aproksimacije slučajne faze na konačnoj temperaturi u kontekstu relativističkog energijskog funkcionala gustoće (Finite Temperature Relativistic RPA) [16]. Napravljeni su proračuni udarnih presjeka i stopa uhvata za jezgre  $^{54,56}\text{Fe}$  i  $^{76,78}\text{Ge}$ , te su uočeni važni efekti korelacija u jednočestičnim stanjima zbog efekata konačne temperature.



Slika 1.3: Ovisnost faktora zauzeća  $f_i$  o jednočestičnoj energiji  $\epsilon_i$  za jezgru  $^{76}\text{Ge}$  izračunata pomoću relativističke teorije srednjeg polja na konačnoj temperaturi.

<sup>1</sup>independent-particle model (eng.)

<sup>2</sup>LSSM - large scale shell model (eng.)

<sup>3</sup>RPA - random phase approximation (eng.)

Cilj ovog rada je uspostaviti teorijski okvir i napraviti proračun udarnih presjeka i stopa uhvata elektrona uključujući efekte konačne temperature, i po prvi put korelacije sparivanja među nukleonima. Efekt sparivanja u nuklearnoj fizici se vidi u razlici između energija vezanja parnih i neparnih jezgara, a detaljnije je opisan u poglavlju (2). Dosadašnje teorije građene na RPA [16] su zanemarile interakciju sparivanja. Izgradili smo teoriju uhvata elektrona na nuklearnim jezgrama koristeći relativističku teoriju srednjeg polja uz BCS teoriju na konačnoj temperaturi<sup>1</sup> za određivanje jednočestične nuklearne baze u osnovnom stanju, dok su pobuđenja izračunata u kontekstu relativističke kvazičestične aproksimacije slučajne faze<sup>2</sup>. Iako su dosadašnji proračuni bazirani na FT-RRPA<sup>3</sup> omogućavali dosta dobre rezultate, njihova točnost je bila ograničena na raspon temperatura iznad  $\sim 0.5$  MeV, odnosno iznad temperatura faznog prijelaza nukleona iz supratekućeg u normalno stanje [16]. Kombinacija FT-HBCS+FT-RQRPA teorije razvijene u ovom radu će se moći koristiti za istraživanje uhvata elektrona i ispod temperatura faznog prijelaza. U poglavlju (2) opisana je relativistička teorija srednjeg polja na konačnoj temperaturi uz BCS teoriju, u poglavlju (3) gradimo formalizam RQRPA na konačnoj temperaturi, zatim u poglavlju (4) je prikazan pregled teorije uhvata elektrona. Numeričke metode koje smo koristili pri izradi ovog rada su predstavljene u poglavlju (5). Rezultati proračuna za jezgre  $^{54}\text{Fe}$  i  $^{56}\text{Fe}$  te  $^{76}\text{Ge}$  i  $^{78}\text{Ge}$  se nalaze u poglavlju (6).

---

<sup>1</sup>FT-HBCS - finite temperature Hartree BCS (eng.)

<sup>2</sup>RQRPA - relativistic quasiparticle random phase approximation (eng.)

<sup>3</sup>FT-RRPA - finite temperature Relativistic RPA (eng.)

## 2 Hartree BCS teorija na konačnoj temperaturi

### 2.1 Energijski funkcional gustoće

Teorija funkcionala gustoće (DFT)<sup>1</sup> omogućava dobar opis svojstava osnovnog stanja i kolektivnih pobuđenja atomskih jezgara duž cijele karte nuklida [17]. Osnovna ideja DFT-a je da energiju osnovnog stanja nekog stacionarnog višestručnog sustava možemo prikazati preko gustoće u osnovnom stanju [18]. DFT se temelji na teoremu Hohenberga i Kohna (HK) koji glasi [18]

Ukoliko imamo neki višestručni sustav u vanjskom potencijalu  $v_{ext}(\mathbf{r})$ , tada postoji funkcional  $E_v[\rho]$  gustoće  $\rho(\mathbf{r})$  te je ukupna energija dana s

$$E_v[\rho] = F_{HK}[\rho] + \int d^3r v_{ext}(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r}). \quad (2.1)$$

HK teoremi nam ne stavljaju nikakav uvjet na  $F_{HK}$ , osim da ovisi o obliku interakcije među česticama. U fizici čvrstog stanja se radi o kulonskoj interakciji pa možemo zapisati oblik  $F_{HK}$ , no u nuklearnoj fizici interakcija je jaka nuklearna za koju općenito ne znamo kako izgleda potencijal. Valna funkcija osnovnog stanja  $\Psi_0$  minimizira funkcional (2.1), a budući da nam HK teorem u principu omogućava izračun  $\Psi_0(\mathbf{r})$  iz gustoće osnovnog stanja  $\rho_0(\mathbf{r})$ , varijacijom funkcionala  $E_v[\rho]$  možemo odrediti  $\rho_0(\mathbf{r})$ . No, zbog činjenice da u nuklearnoj fizici oblik  $F_{HK}[\rho]$  nije poznat, moramo se oslanjati na različite aproksimacije, od kojih je najjednostavnija aproksimacija lokalne gustoće (LDA)<sup>2</sup> koja ograničava oblik funkcionala (2.1) na [19]

$$F[\rho(\mathbf{r})] = \int d^3r \rho(\mathbf{r})f(\rho(\mathbf{r})). \quad (2.2)$$

Postoje i mnoge druge aproksimacije koje poboljšavaju gornji rezultat [19]. Još jedan problem gornjeg pristupa je što još nije pronađen oblik funkcionala  $F_{HK}$  koji bi reproducirali efekte modela ljusaka. Model ljusaka je jedna od temeljnih teorija u nuklearnoj fizici koja je uspješno reproducirala magične brojeve jezgara. Rješenje problema nalazimo u Kohn-Shamovom (KS) pristupu u kojem egzaktnu lokalnu gustoću  $\rho(\mathbf{r})$  pridružujemo vanjskom potencijalu  $v_{KS}(\mathbf{r})$ , definiranom tako da je egzaktna gustoća osnovnog stanja

---

<sup>1</sup>density functional theory (eng.)

<sup>2</sup>local density approximation (eng.)

$\rho_0(\mathbf{r})$  interagirajućeg sustava ista kao gustoća neinteragirajućeg jednočestičnog sustava

$$\rho_0(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r}) = \sum_i |\phi(\mathbf{r})|^2. \quad (2.3)$$

Ukupni funkcional gustoće još možemo pisati i kao [19]

$$E_v[\rho] = \min_{\Psi \rightarrow \rho} \langle \Psi | \hat{T} + \hat{V} | \Psi \rangle + \int d^3 \rho(\mathbf{r}) v_{ext}(\mathbf{r}), \quad (2.4)$$

gdje smo zapisali  $F_{HK}[\rho] = \min_{\Psi \rightarrow \rho} \langle \Psi | \hat{T} + \hat{V} | \Psi \rangle$ . Kinetičku energiju sada možemo razdvojiti na neinteragirajući dio  $T_s[\rho]$  i ostatak  $T_c[\rho]$

$$T[\rho] = T_s[\rho] + T_c[\rho], \quad (2.5)$$

gdje sada  $T_s[\rho]$  možemo izraziti preko jednočestičnih valnih funkcija

$$T_s[\rho] = -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_i \int d^3 r \phi_i^*(\mathbf{r}) \nabla^2 \phi_i(\mathbf{r}). \quad (2.6)$$

Egzaktni funkcional je tada dan s

$$\begin{aligned} E_v[\rho] &= T[\rho] + V[\rho] + V_{ext}[\rho] \\ &= T_s[\{\phi_i(\rho)\}] + V_H[\rho] + E_{xc}[\rho] + V_{ext}[\rho], \end{aligned} \quad (2.7)$$

gdje smo označili  $V_{ext} = \int d^3 r \rho(\mathbf{r}) v_{ext}(\mathbf{r})$ .  $V_H$  je Hartreejeva energija, a  $E_{xc}$  sadrži sve preostale članove. Problem je što nam je sada  $E_{xc}$  nepoznat funkcional. No u KS pristupu minimizaciju provodimo kao

$$\frac{\delta E_v[\rho]}{\delta \rho(\mathbf{r})} = 0 = \frac{\delta T_s[\rho]}{\delta \rho(\mathbf{r})} + \frac{\delta V_H[\rho]}{\delta \rho(\mathbf{r})} + \frac{\delta V_{ext}[\rho]}{\delta \rho(\mathbf{r})} + \frac{\delta E_{xc}[\rho]}{\delta \rho(\mathbf{r})}, \quad (2.8)$$

te ako iskoristimo pretpostavku KS pristupa, možemo pronaći vanjski potencijal  $u_s(\mathbf{r})$  koji predstavlja sustav neinteragirajućih čestica čija minimizacija glasi

$$\frac{\delta E_v[\rho]}{\delta \rho(\mathbf{r})} = 0 = \frac{\delta T_s[\rho]}{\delta \rho(\mathbf{r})} + u_s(\mathbf{r}). \quad (2.9)$$

Usporedbom jednadžbi (2.8) i (2.9) vidimo da će imati istu minimizaciju ukoliko

$$u_s(\mathbf{r}) = \frac{\delta V_H[\rho]}{\delta \rho(\mathbf{r})} + \frac{\delta V_{ext}[\rho]}{\delta \rho(\mathbf{r})} + \frac{\delta E_{xc}[\rho]}{\delta \rho(\mathbf{r})}. \quad (2.10)$$

Konkretno, u KS pristupu računamo gustoću višečestičnog sustava rješavanjem jednadžbi gibanja neinteragirajućih sustava u potencijalu  $u_s(\mathbf{r})$ . Obično sustav KS jed-

nadžbi rješavamo samosuglasno.

## 2.2 Relativistička teorija srednjeg polja

Izvod relativističkog energijskog funkcionala gustoće kreće od zapisa Lagrangijana interakcije koji uključuje željene stupnjeve slobode. Energijski funkcional gustoće izvodimo varijacijskim postupkom iz Lagrangijana. Relativistička teorija srednjeg polja (RMFT)<sup>1</sup> je bazirana na teoriji kvantne hadrodinamike (QHD)<sup>2</sup>. U ovom modelu, nukleoni su opisani kao Diracove čestice koje izmjenjuju mezone. Minimalan skup mezona potreban za ispravan opis svojstava nuklearnih jezgara uključuje  $\sigma, \omega$  i  $\rho$  mezone, te elektromagnetsku interakciju [17, 20, 21]. Izoskalarni-skalarni  $\sigma$  mezon je odgovoran za privlačnu interakciju srednjeg dosega među nukleonima, izoskalarni-vektorski  $\omega$  mezon je odgovoran za odbijanje na malim udaljenostima, a izovektorski-vektorski  $\rho$  mezon opisuje izospinsku ovisnost nuklearne sile. Pioni ( $\pi$  mezoni) ne ulaze u Lagrangijan na Hartree nivou zbog loma paritetne simetrije, no izmjena dva piona je efektivno uključena u polje  $\sigma$  mezona.

Ukupna gustoća Lagrangijana je dana s [17, 20, 21]

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_N + \mathcal{L}_m + \mathcal{L}_{int}. \quad (2.11)$$

$\mathcal{L}_N$  označava Lagrangijan slobodnog nukleona

$$\mathcal{L}_N = \bar{\psi}(i\gamma_\mu\partial^\mu - m)\psi, \quad (2.12)$$

gdje je  $m$  *gola* masa nukleona, a  $\psi$  označava Diracov spinor. Lagrangijan mezonskih polja  $\mathcal{L}_m$  je dan s

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_m = & \frac{1}{2}\partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma - \frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma^2 - \frac{1}{4}\Omega_{\mu\nu}\Omega^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_\omega^2\omega_\mu\omega^\mu \\ & - \frac{1}{4}\vec{R}_{\mu\nu}\cdot\vec{R}^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_\rho^2\vec{\rho}_\mu\cdot\vec{\rho}^\mu - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

---

<sup>1</sup>relativistic mean field theory (eng.)

<sup>2</sup>quantum hadrodynamics (eng.)



s odgovarajućim masama mezona  $m_\sigma, m_\omega, m_\rho$  i tenzorima polja  $\Omega_{\mu\nu}, \vec{R}_{\mu\nu}$  i  $F_{\mu\nu}$

$$\begin{aligned}\Omega_{\mu\nu} &= \partial_\mu \omega_\nu - \partial_\nu \omega_\mu, \\ \vec{R}_{\mu\nu} &= \partial_\mu \vec{\rho}_\nu - \partial_\nu \vec{\rho}_\mu, \\ F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu.\end{aligned}\tag{2.14}$$

Sa strelicama označavamo izovektore, a podebljanim fontom vektore u običnom prostoru. Lagrangijan interakcije je dan s [17, 20, 21]

$$\mathcal{L}_{int} = -g_\sigma \bar{\psi} \psi \sigma - g_\omega \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \omega_\mu - g_\rho \bar{\psi} \vec{\tau} \gamma^\mu \psi \vec{\rho}_\mu - e \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu,\tag{2.15}$$

s konstantama vezanja  $g_\sigma, g_\omega, g_\rho$  i  $e$ .

Uvodimo izoskalarnu-skalarnu gustoću, izoskalarnu-vektorsku struju, izovektorsku-vektorsku struju i EM struju kao

$$\rho_s(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^A \bar{\psi}_i(\mathbf{r}) \psi_i(\mathbf{r}),\tag{2.16}$$

$$\mathbf{j}_\mu(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^A \bar{\psi}_i(\mathbf{r}) \gamma_\mu \psi_i(\mathbf{r}),\tag{2.17}$$

$$\vec{\mathbf{j}}_\mu(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^A \bar{\psi}_i(\mathbf{r}) \vec{\tau} \gamma_\mu \psi_i(\mathbf{r}),\tag{2.18}$$

$$j_{p\mu}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^Z \psi_i^\dagger(\mathbf{r}) \gamma_\mu \psi_i(\mathbf{r}),\tag{2.19}$$

gdje sumiramo po pozitivnim energetske stanjima ispod Fermijeve razine, odnosno koristimo tzv. *no-sea approximation* (eng.). Gustoća Hamiltonijana je dana kao (0,0) komponenta tenzora energije-impulsa

$$\mathcal{H} = T^{00} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - \mathcal{L},\tag{2.20}$$

pri čemu je  $q_j$  generalizirana koordinata. Gornji izraz vodi na relativistički funkcional gustoće

$$E_{RMF} = \int d^3r \mathcal{H}(\mathbf{r}),\tag{2.21}$$

kojeg u KS pristupu možemo izraziti preko jednočestične gustoće [19]

$$\hat{\rho} = \sum_{i=1}^A |\psi_i(\mathbf{r})\rangle \langle \psi_i(\mathbf{r})|.\tag{2.22}$$

Za detalje oko zapisivanja interakcijskog dijela Hamiltonijana preko jednočestične gustoće pogledati Dodatak (B).

Još u ranijim danima relativističkog funkcionala gustoće uočeno je da ovakav model ne može reproducirati ključna nuklearna svojstva [17, 19–21]. Jedno od rješenja bilo je dodavanje nelinearnog člana u interakciju  $\sigma$  mezona oblika [20, 21]

$$U(\sigma) = \frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma^2 + \frac{1}{3}g_2\sigma^3 + \frac{1}{4}g_3\sigma^4, \quad (2.23)$$

gdje su se parametri  $g_2$  i  $g_3$  prilagođavali na svojstva konačnih jezgara zajedno s ostalim parametrima modela. U ovom radu za konstante vezanja mezona  $g_\sigma, g_\omega, g_\rho$  uzimamo da su funkcije vektorske gustoće  $\rho_v = \sqrt{j_\mu j^\mu}$ , gdje je  $j_\mu = \bar{\psi}\gamma_\mu\psi$ . Drugi mogući odabir bi bilo koristiti ovisnost konstanti vezanja o skalarnoj gustoći, no uočeno je da vektorska gustoća daje bolje rezultate za konačne jezgre [19].

Jednočestičnu Diracovu jednadžbu izvodimo varijacijom funkcionala gustoće s obzirom na  $\bar{\psi}$

$$\hat{h}_D\psi_i = \epsilon_i\psi_i, \quad (2.24)$$

gdje su  $\epsilon_i$  jednočestične energije, a

$$\hat{h}_D = \alpha(\mathbf{p} - \boldsymbol{\Sigma}) + \Sigma_0 + \beta(m + \Sigma_s), \quad (2.25)$$

Diracov Hamiltonijan. Vlastite energije  $\Sigma$  su definirane kao

$$\begin{aligned} \Sigma_s(\mathbf{r}) &= g_\sigma\sigma(\mathbf{r}), \\ \Sigma_\mu(\mathbf{r}) &= g_\omega\omega_\mu(\mathbf{r}) + g_\rho\vec{\tau} \cdot \vec{\rho}_\mu(\mathbf{r}) + eA_\mu(\mathbf{r}) + \Sigma_\mu^R(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Ovisnost konstanti vezanja o gustoći producira nove članove [17]

$$\Sigma_\mu^R = \frac{j_\mu}{\rho_v} \left( \frac{\partial g_\sigma}{\partial \rho_v} \rho_s \sigma + \frac{g_\omega}{\partial \rho_v} j_v \omega^\nu + \frac{\partial g_\rho}{\partial \rho_v} \vec{j}_v \cdot \vec{\rho}^\nu \right). \quad (2.27)$$

Varijacija funkcionala gustoće (2.21) s obzirom na mezonska polja vodi na Helmholtzove jednadžbe [17]

$$[-\nabla^2 + m_\sigma^2]\sigma = -g_\sigma\rho_s, \quad (2.28)$$

$$[-\nabla^2 + m_\omega^2]\omega^\mu = g_\omega j^\mu, \quad (2.29)$$

$$[-\nabla^2 + m_\rho^2]\vec{\rho}^\mu = g_\rho \vec{j}^\mu, \quad (2.30)$$

te na Poissonovu jednadžbu za elektromagnetsko polje [17]

$$-\nabla^2 A^\mu = e j_p^\mu. \quad (2.31)$$

Zbog sačuvanja naboja, samo treća komponenta izovektorskog  $\rho$  mezona doprinosi, a budući da promatramo osnovno stanje parno-parnih jezgara, prostorne komponente mezon-skih polja iščezavaju kao i prostorne komponente 4-struja (invarijantnost na vremensku inverziju) [17, 20, 21]. Struje i gustoće tada imaju oblik [19]

$$\rho_s = \sum_{i=1}^A \bar{\psi} \psi, \quad (2.32)$$

$$\rho_v = \sum_{i=1}^A \bar{\psi} \gamma^0 \psi, \quad (2.33)$$

$$\rho_{tv} = \sum_{i=1}^A \bar{\psi} \gamma^0 \tau_3 \psi, \quad (2.34)$$

$$\rho_p = \sum_{i=1}^A \bar{\psi} \frac{1}{2} (1 + \tau_3) \psi. \quad (2.35)$$

Diracova jednadžba sada ima jednostavniji oblik, koji sadrži vektorski potencijal  $V(\mathbf{r})$  i efektivnu masu  $M^*(\mathbf{r}) = m + g_\sigma \sigma$

$$[-i\alpha \nabla + \beta M^*(\mathbf{r}) + V(\mathbf{r})] \psi_i(\mathbf{r}) = \epsilon_i \psi_i(\mathbf{r}). \quad (2.36)$$

Vektorski potencijal glasi

$$V(\mathbf{r}) = g_\omega \omega + g_\rho \tau_3 \rho + e A_0 + \Sigma_0^R, \quad (2.37)$$

gdje je član zbog ovisnosti konstanti vezanja o gustoći sada

$$\Sigma_0^R = \frac{\partial g_\sigma}{\partial \rho_v} \rho_s \sigma + \frac{\partial g_\omega}{\partial \rho_v} \rho_v \omega + \frac{\partial g_\omega}{\partial \rho_v} \rho_{tv} \rho. \quad (2.38)$$

Ovisnost konstanti vezanja o gustoći parametrizira se na fenomenološki način, a temeljnija je na fundamentalnijim proračunima u Dirac-Bruecknerovoj teoriji [22, 23]. Vezanje  $\sigma$  i  $\omega$  mezona glasi [17, 22, 23]

$$g_i(\rho) = g_i(\rho_{sat}) f_i(x), \quad i = \sigma, \omega, \quad (2.39)$$

gdje

$$f_i(x) = a_i \frac{1 + b_i(x + d_i)^2}{1 + c_i(x + d_i)^2}, \quad (2.40)$$

koja je funkcija  $x = \rho/\rho_{sat}$ , a  $\rho_{sat}$  je gustoća bariona pri zasićenju simetrične nuklearne materije. Osam realnih parametara u (2.40) nije nezavisno već imamo

$$f_i(1) = 1, \quad f''_\sigma(1) = f''_\omega(1), \quad f''_i(0) = 0, \quad (2.41)$$

koji reduciraju broj slobodnih parametara na tri. Za  $\rho$  mezon koristimo [17, 22, 23]

$$g_\rho(\rho) = g_\rho(\rho_{sat})e^{-a_\rho(x-1)}. \quad (2.42)$$

Dakle izovektorski kanal je parametriziran s  $g_\rho(\rho_{sat})$  i  $a_\rho$ , dok za izoskalarni kanal imamo sve skupa tri parametra. Mase  $\omega$  i  $\rho$  mezona su *gole* mase  $m_\omega = 783$  MeV i  $m_\rho = 763$  MeV [17], dok je masa  $\sigma$  mezona slobodan parametar. Popis svih parametara za relativistički funkcional izmjene mezona ovisan o gustoći (DD-ME2)<sup>1</sup> se nalazi u tablici (2.1).

U ovom radu te kodovima korištenim kod proračuna podrazumijeva se da promatramo

Tablica 2.1: Popis parametara za DD-ME2 interakciju ovisnu o gustoći, podaci su preuzeti iz [19].

DD-ME2		
$m_\sigma$	555.1238	MeV
$m_\omega$	783.0	MeV
$m_\rho$	763.0	MeV
$g_\sigma(\rho_{sat})$	10.5396	
$g_\omega(\rho_{sat})$	13.0189	
$g_\rho(\rho_{sat})$	3.6836	
$a_\sigma$	1.3881	
$b_\sigma$	1.0943	
$c_\sigma$	1.7057	
$d_\sigma$	0.4421	
$a_\omega$	1.3892	
$b_\omega$	0.9240	
$c_\omega$	1.4620	
$d_\omega$	0.4775	
$a_\rho$	0.5647	

parne sferno-simetrične jezgre. Budući da u tom slučaju imamo rotacijsku invarijantnost uvodimo sferne koordinate

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta. \quad (2.43)$$

<sup>1</sup>density dependent meson-exchange (eng.)

Diracov spinor je određen ukupnim angularnim momentom  $j_i$ , njegovom projekcijom  $m_i$ , paritetom  $\pi_i$ , te projekcijom izospina  $t_i = \pm 1/2$  za neutrone odnosno protone, a glasi [17, 20, 21]

$$\psi_i(\mathbf{r}, s, t) = \begin{pmatrix} f_i(r)\Phi_{l_i j_i m_i}(\theta, \phi, s) \\ i g_i(r)\Phi_{\tilde{l}_i j_i m_i}(\theta, \phi, s) \end{pmatrix} \chi_{t_i}, \quad (2.44)$$

gdje su  $f_i, g_i$  velike odnosno male komponente Diracovog spinora,  $\chi_{t_i}$  je izospinska valna funkcija, a

$$\Phi_{l_j m}(\theta, \phi, s) = [\chi_{1/2}(s) \otimes Y_l(\theta, \phi)]_{jm}, \quad (2.45)$$

predstavlja kutni dio Diracovog spinora.  $\chi_{1/2}$  su spinske valne funkcije, a  $Y_l(\theta, \phi)$  odgovaraju kuglinim funkcijama. U gornjem izrazu imamo zapis u vezanoj bazi angularnog momenta

$$\Phi_{l_j m}(\theta, \phi, s) = \sum_{m_s, m_l} C_{1/2 m_s l m_l}^{j m} Y_{l m_l}(\theta, \phi) \chi_{m_s}, \quad (2.46)$$

gdje  $C_{1/2 m_s l m_l}^{j m}$  predstavlja Clebsch-Gordanove koeficijente. Orbitalni angularni momenti  $l_i$  i  $\tilde{l}_i$  su određeni s  $j_i$  i paritetom  $\pi_i$  kao [21]

$$\begin{aligned} l &= j + \frac{1}{2}, & \tilde{l} &= j - \frac{1}{2}, & \text{za } \pi &= (-)^{j+1/2}, \\ l &= j - \frac{1}{2}, & \tilde{l} &= j + \frac{1}{2}, & \text{za } \pi &= (-)^{j-1/2}. \end{aligned}$$

Ovim postupkom smo izdvojili kutnu ovisnost te za jednadžbe gibanja dobivamo skup vezanih diferencijalnih jednadžbi u radijalnoj koordinati  $r$  za velike  $f(r)$  i male  $g(r)$  komponente spinora [17, 21]

$$\begin{aligned} (M^*(r) + V(r))f_i(r) + \left(\frac{d}{dr} - \frac{\kappa_i - 1}{r}\right)g_i(r) &= \epsilon_i f_i(r), \\ -\left(\frac{d}{dr} + \frac{\kappa_i + 1}{r}\right)f_i(r) - (M^*(r) - V(r))g_i(r) &= \epsilon_i g_i(r), \end{aligned} \quad (2.47)$$

gdje smo definirali  $\kappa_i = \pm(j_i + 1/2)$  za  $j_i = l_i \mp 1/2$ .

Kod numeričkog rješavanja gornjih jednadžbi (2.47) velike i male komponente Diracovog spinora razvijamo po radijalnim valnim funkcijama harmoničkog oscilatora  $R_{nl}(r, b_0)$ , frekvencije  $\hbar\omega_0$  i oscilatorne duljine  $b_0 = \sqrt{\hbar/m\omega_0}$  [17]

$$f_i(r) = \sum_{n=0}^{n_{max}} f_n^{(i)} R_{nl_i}(r, b_0), \quad g_i(r) = \sum_{\tilde{n}=0}^{\tilde{n}_{max}} g_{\tilde{n}}^{(i)} R_{\tilde{n}\tilde{l}_i}(r, b_0). \quad (2.48)$$

Radijalne valne funkcije glase

$$R_{nl}(r, b_0) = b_0^{-3/2} R_{nl}(\xi) = b_0^{-3/2} \mathcal{N}_{nl} \xi^l L_n^{l+1/2}(\xi^2) e^{-\xi^2/2}, \quad (2.49)$$

gdje smo uveli  $\xi = r/b_0$ , a  $n$  odgovara radijalnom kvantnom broju.  $L_n^m(\xi^2)$  su pridruženi Laguerrovi polinomi čija se definicija može pronaći u [24]. Faktor normalizacije je

$$\mathcal{N}_{nl} = \sqrt{\frac{2n!}{(l+n+1/2)!}}. \quad (2.50)$$

Gornje granice u razvoju (2.48)  $n_{max}$  i  $\tilde{n}_{max}$  su određene brojem glavnih oscilatorskih ljusaka  $N_{max} = 2(n_{max} - 1) + l_i$  i  $\tilde{N}_{max} = 2(\tilde{n}_{max} - 1) + \tilde{l}_i$ . U proračunima je važno da  $\tilde{N}_{max}$  do kojeg se razvijaju male komponente bude veći od  $N_{max}$  za velike komponente. Stoga se u kodu uzima  $\tilde{N}_{max} = N_{max} + 1$ . Uvrštavanjem razvoja (2.48) u sustav diferencijalnih jednadžbi (2.47) dobivamo problem dijagonalizacije dimenzije  $\tilde{n}_{max} + n_{max}$  čiji se matricni elementi mogu pronaći u [17, 21].

Helmholtzove jednadžbe za mezonska polja u slučaju sferne simetrije svode se na [17, 21]

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + m_\phi^2\right) \phi(r) = s_\phi(r), \quad (2.51)$$

za  $\phi = \sigma, \omega, \rho$ . Rješenje također dobivamo razvojem u bazi harmoničkog oscilatora, no sada razmatramo bozonska polja. Koristimo radijalne oscilatorske funkcije s  $l = 0$  i oscilatorskom duljinom  $b_B = b_0/\sqrt{2}$ , pa razvoj glasi

$$\phi(r) = \sum_{n=0}^{n_b} \phi_n R_{n0}(r, b_0), \quad s_\phi(r) = \sum_{n=0}^{n_b} d_n^\phi R_{n0}(r, b_0), \quad (2.52)$$

gdje smo odabrali  $N_B = 2n_b$ , koji određuje radijalni kvantni broj  $n_b$ . Umetanjem ansatza (2.52) u Helmholtzovu jednadžbu (2.51) dolazimo do nehomogenog sustava linearnih jednadžbi

$$\sum_{n'=0}^{n_b} \mathcal{H}_{nn'} \phi_{n'} = s_n^\phi, \quad (2.53)$$

kojeg rješavamo inverzijom. Izraz za  $\mathcal{H}_{nn'}$  se može pronaći u referencama [17, 21].

Kulonski član potencijala kod protona je oblika

$$V_c(\mathbf{r}) = e^2 \int d^3 r' \frac{\rho_p(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (2.54)$$

Singularitet u  $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$  možemo zaobići koristeći [17, 21]

$$\nabla^2 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \frac{2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (2.55)$$

što nam nakon parcijalne integracije daje

$$V_c(\mathbf{r}) = \frac{e^2}{2} \int d^3 r' |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \nabla_{\mathbf{r}'}^2 \rho_p(\mathbf{r}'). \quad (2.56)$$

Gornji izraz možemo integrirati i dobiti kulonski potencijal.

Sustav jednačbi za velike i male komponente Diracovog spinora (2.47), te za mezoniska polja (2.51) se rješava samosuglasno. Prvo se procijene<sup>1</sup>  $M^*(r)$  i  $V(r)$  iz jednačbe (2.36) iz kojih se zatim može riješiti sustav diferencijalnih jednačbi (2.47) nakon kojeg računamo mezoniska polja u Helmholtzovim jednačbama (2.51) iz kojih slijede novi  $M^*(r)$  i  $V(r)$ . Postupak se ponavlja do konvergencije. U kodu koristimo parametre  $\hbar\omega_0 = 41 A^{-1/3}$  MeV, te za broj ljusaka  $N_F = N_B = 20$ .

### 2.3 Hartree BCS teorija na konačnoj temperaturi

Kod jezgara s otvorenim ljuskama, slika jezgre kao skupa nezavisnih nukleona koji se gibaju u usrednjenom potencijalu nije dovoljna kako bi se opisalo osnovno stanje atomske jezgre. Naime, kod jezgara sa zatvorenim ljuskama rascjep između energijskih nivoa koji se nalaze ispod i iznad Fermijeve razine je dovoljno velik da možemo zanemariti raspršenje čestica u pobuđeno stanje. No, kod jezgara s otvorenim ljuskama energijski rascjep je dovoljno nizak da u obzir moramo uzeti korelacije između zastupljenosti pojedinih energijskih nivoa. Opisana situacija je prikazana na slici (2.1). Na lijevoj strani slike je slučaj gdje nukleoni zauzimaju sva stanja do Fermijeve razine, a desno vidimo razmazanu raspodjelu unesenu zbog korelacija sparivanja.

Korelacije sparivanja čine kratkodosežni dio nuklearne sile i nastoje raspršiti čestice iz njihovih orbitala. Postoje mnogi eksperimentalni dokazi koji upućuju na postojanje korelacija sparivanja u atomskim jezgrama od kojih je vjerojatno najpoznatiji parno-neparni efekt [25]. Naime ukupna energija parno-neparne jezgre je manja od aritmetičke sredine energija vezanja susjednih parno-parnih jezgara [25, 26]

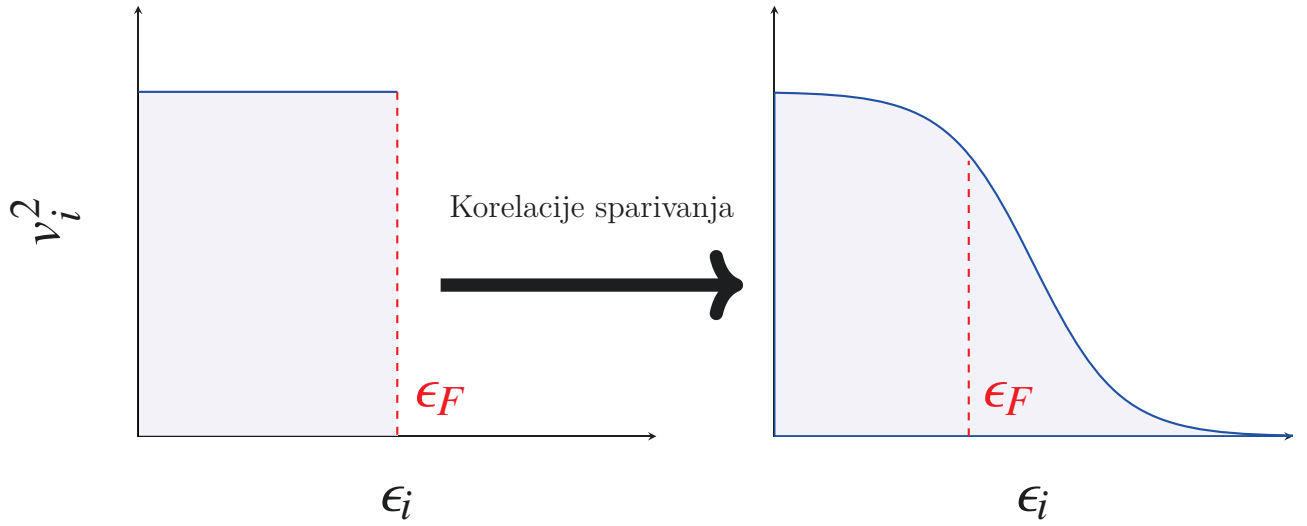
$$M_{A-neparan} > \frac{M_{A-1} + M_{A+1}}{2}. \quad (2.57)$$

Korelacije sparivanja ne možemo jednostavno uključiti u klasični RMF Lagrangijan, budući da on ne sadrži  $\psi^\dagger\psi^\dagger$  doprinose [19]. Potrebna nam je nova teorija za opis ovog efekta. U fizici čvrstog stanja za opis koreliranih elektrona u supravodičima koristi se BCS<sup>2</sup> teorija. Ista se može primijeniti na opis korelacija sparivanja u nuklearnoj fizici [27].

---

<sup>1</sup>u dijelu literature ove komponente su nešto drugačije definirane pa se obično govori o skalarnom S i vektorskom potencijalu V. Pogledati [19].

<sup>2</sup>Bardeen, Cooper, Schrieffer



Slika 2.1: Raspodjela nukleona unutar jezgre prije (lijevo) i nakon (desno) uključivanja korelacija sparivanja. Grafovi prikazuju ovisnost BCS faktora zauzeća  $v_i^2$  (vidi tekst) o jednočestičnoj energiji  $\epsilon_i$ . Vidimo da je efekt korelacija sparivanja "razmazivanje" distribucije vjerojatnosti nukleona.

BCS ansatz za varijacijsku valnu funkciju glasi [25]

$$|\text{BCS}\rangle = \prod_{k>0} (u_k + v_k a_k^\dagger a_{\bar{k}}^\dagger) |-\rangle, \quad (2.58)$$

gdje su  $u_k, v_k$  varijacijski parametri,  $a_k^\dagger, a_{\bar{k}}^\dagger$  operatori stvaranja čestice u stanju  $k, \bar{k}$ . Za svako stanje  $k > 0$ , postoji konjugirano stanje  $\bar{k} < 0$ .  $v_k^2$  i  $u_k^2$  predstavljaju vjerojatnost da je određeno stanje  $(k, \bar{k})$  zauzeto odnosno nezauzeto. Oni nisu međusobno nezavisni i vrijedi

$$|u_k|^2 + |v_k|^2 = 1. \quad (2.59)$$

Jednadžbe za koeficijente  $u_k$  i  $v_k$  izvedene su varijacijom Hamiltonijana višečestičnog sustava s obzirom na BCS valnu funkciju uz ograničenje da je očekivana vrijednost broja čestica  $N$

$$\langle \text{BCS} | \hat{N} | \text{BCS} \rangle = 2 \sum_{k>0} v_k^2 = N. \quad (2.60)$$

Izvod FT-HBCS<sup>1</sup> teorije iz fundamentalnije FT-HFB<sup>2</sup> teorije se može pronaći u [28].

<sup>1</sup>FTHBCS - Finite Temperature Hartree BCS (eng.)

<sup>2</sup>FTHFB - Finite Temperature Hartree-Fock Bogoliubov (eng.)



Ovdje prezentiramo rezultate koje moramo implementirati u izračunu osnovnog stanja koristeći energijski funkcional gustoće. Izvod na konačnoj temperaturi se razlikuje od izvoda na temperaturi nula u tome što varijaciju radimo na velekanonskom potencijalu  $\Omega$  kojeg izražavamo preko gustoće. Za sustav koji je mehanički izoliran i nalazi se na konstantnoj temperaturi i kemijskom potencijalu uvjet ravnoteže glasi

$$\delta\Omega = 0. \quad (2.61)$$

Gustoće i struje dobivaju BCS faktore, te glase [29]

$$\rho_s = \sum_{i=1}^A [v_i^2(1-2f_i) + f_i] \bar{\psi} \psi, \quad (2.62)$$

$$\rho_v = \sum_{i=1}^A [v_i^2(1-2f_i) + f_i] \bar{\psi} \gamma^0 \psi, \quad (2.63)$$

$$\rho_{tv} = \sum_{i=1}^A [v_i^2(1-2f_i) + f_i] \bar{\psi} \gamma^0 \tau_3 \psi, \quad (2.64)$$

$$\rho_p = \sum_{i=1}^A [v_i^2(1-2f_i) + f_i] \bar{\psi} \frac{1}{2} (1 + \tau_3) \psi, \quad (2.65)$$

gdje je  $f_i = \left(1 + \exp\left(\frac{E_i}{k_B T}\right)\right)^{-1}$ , Fermi-Dirac faktor, a BCS faktori se mogu izračunati iz

$$v_i^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\epsilon_i - \lambda_q}{E_i}\right), \quad (2.66)$$

$$u_i^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\epsilon_i - \lambda_q}{E_i}\right). \quad (2.67)$$

$\epsilon_i$  su jednočestične energije,  $\lambda_q$  je kemijski potencijal kojeg određujemo iz sačuvanja broja čestica  $N_q = 2 \sum_{k>0} [v_i^2(1-2f_i) + f_i]$ , a  $E_i = \sqrt{(\epsilon_i - \lambda_q)^2 + \Delta_i^2}$  kvazičestične energije.  $q$  se odnosi na protonska ili neutronska stanja. Parametar rascjepa<sup>1</sup>  $\Delta_i$  je određen jednadžbom

$$\Delta_i = \frac{1}{2} \sum_{j>0} G_{ij} \frac{\Delta_j(1-2f_j)}{E_j}, \quad (2.68)$$

gdje smo izabrali monopolni oblik sile sparivanja

$$V^{pp} = -G \delta_{i\bar{i}} \delta_{j\bar{j}}, \quad (2.69)$$

---

<sup>1</sup>gap parameter (eng.)

koja je definirana konstantom sparivanja  $G$ , različitom za protone i neutrone. Vrijednost konstante jakosti sparivanja određujemo iz tzv. *3-point* (eng.) formule [30], koja se temelji na eksperimentalno određenim energijama separacije protona i neutrona  $S_{n,p}(A, Z)$

$$\Delta_n^{exp} = \frac{1}{2} [S_n(N, Z) - S_n(N-1, Z)], \quad (2.70)$$

$$\Delta_p^{exp} = \frac{1}{2} [S_p(N, Z) - S_p(N, Z-1)]. \quad (2.71)$$

Iako jednačba (2.68) izgleda dosta jednostavno, ima nedostatak da svi energijski nivoi u bazi jednako doprinose energiji sparivanja, a ne samo oni blizu Fermijeve energije. Kako bi tu situaciju učinili fizikalnijom i ograničili se na doprinose oko Fermijeve razine uvodimo težinske faktore [31]

$$s_i = \frac{1}{1 + \exp[(\epsilon_i - \lambda_q - E_c)/(E_c/10)]}, \quad (2.72)$$

gdje je  $E_c$  *cut-off* energija koju određujemo iz uvjeta [31]

$$\sum_i 2s_i = N_q + 1.65N_q^{2/3}, \quad (2.73)$$

za broj čestica  $N_q$ .

Jednačbu rascjepa i BCS koeficijente sada moramo promijeniti [31]

$$1 = \frac{G}{2} \sum_{k>0} \frac{s_k}{\sqrt{(\epsilon_k - \lambda)^2 + s_k^2 \Delta^2}}, \quad (2.74)$$

$$v_k^2 = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\epsilon_k - \lambda}{\sqrt{(\epsilon_k - \lambda)^2 + s_k^2 \Delta^2}} \right). \quad (2.75)$$

Jednostavni BCS opis korelacija sparivanja je ispravan sve dok se držimo analize jezgara koje se nalaze oko doline  $\beta$ -stabilnosti, budući da ne daje ispravan opis raspršenja parova iz vezanih stanja u kontinuum, koji je značajan za jezgre u blizini linija kapanja [19].

### 3 Aproksimacija slučajne faze (RPA)

Ovo poglavlje je podijeljeno na dva dijela. U prvom dijelu izvodimo relativističku aproksimaciju slučajne faze (RRPA)<sup>1</sup> samo za slučaj  $p-h$  (čestica-šupljina) pobuđenja iz vremenski ovisne relativističke teorije srednjeg polja (TD-RMFT)<sup>2</sup>, dok u drugom dijelu prezentiramo kvazičestičnu RPA na konačnoj temperaturi (FT-RQRPA)<sup>3</sup>, gdje su interakcije sparivanja tretirane na BCS nivou. Postoje dva glavna načina izvoda RPA jednadžbi. Prvi je harmonička aproksimacija malene amplitude TDRMF teorije [25, 32], dok drugi koristi formalizam teorije linearnog odziva [33]. U ovom radu se fokusiramo na prvu metodu. RPA je pružila uspješan opis kolektivnih pobuđenja jezgara [32–34], kao i vraćanje simetrija slomljenih u RMFT [19, 25].

#### 3.1 Relativistička aproksimacija slučajne faze (RRPA)

RRPA izvodimo kao limes malenih amplituda harmoničkih oscilacija matrice gustoće  $\hat{\rho}(t)$  na vanjsku oscilatornu pobudu [32]

$$\hat{F}(t) = \hat{F}e^{-i\omega t} + \text{h. c.} \quad (3.1)$$

Jednadžba gibanja za operator gustoće se svodi na

$$i\delta_t \hat{\rho} = [\hat{h}(\hat{\rho}) + \hat{f}(t), \hat{\rho}]. \quad (3.2)$$

U linearnoj aproksimaciji možemo pisati

$$\hat{\rho}(t) = \hat{\rho}^{(0)} + \delta\hat{\rho}(t), \quad (3.3)$$

gdje je  $\rho^{(0)}$  gustoća osnovnog stanja. Pretpostavljamo da se u svakom trenutku matrica gustoće ponaša kao projektor

$$\hat{\rho}^2(t) = \hat{\rho}(t), \quad (3.4)$$

---

<sup>1</sup>Relativistic Random Phase Approximation (eng.)

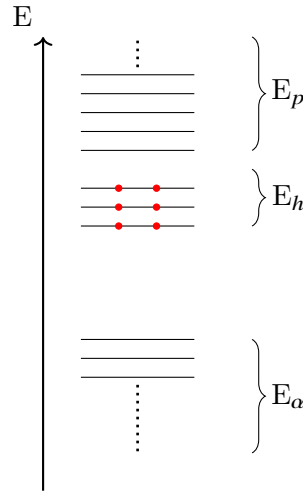
<sup>2</sup>Time-Dependent Relativistic Mean Field Theory (eng.)

<sup>3</sup>Finite Temperature Relativistic Quasiparticle Random Phase Approximation (eng.)

pa su svojstvene vrijednosti  $\hat{\rho}^0$  0 i 1 [32]. Bazu našeg konfiguracijskog prostora prikazujemo kao

$$\rho_{kl}^{(0)} = \delta_{kl} \rho_k^{(0)} = \begin{cases} 0, & \text{za nezauzeta stanja iznad Fermijevog nivoaa (indeks p),} \\ 1, & \text{za zauzeta stanja u fermijevom moru (indeks h),} \\ 0, & \text{za nezauzeta stanja u Diracovom moru (indeks \alpha).} \end{cases} \quad (3.5)$$

Konfiguracijski prostor za RRPA je prikazan na slici (3.1). Sastoji se od šupljina u Fermijevom moru ( $h$ ), čestica iznad Fermijeve razine ( $p$ ), te stanja u Diracovom moru ( $\alpha$ ) za koje uzimamo da su nezauzeta<sup>1</sup> [32, 35].



Slika 3.1: Prikaz energijskih nivoa kod RRPA. Slika je napravljena po uzoru na [36].

Jedini neiščezavajući matrični elementi  $\delta\hat{\rho}$  matrice su  $\delta\rho_{ph}, \delta\rho_{hp}, \delta\rho_{ah}$  i  $\delta\rho_{ha}$ . Za jednadžbu (3.2) u linearnoj aproksimaciji imamo [32, 35]

$$i\delta_t\delta\hat{\rho} = [\hat{h}^{(0)}, \delta\hat{\rho}] + \left[ \frac{\partial\hat{h}}{\partial\rho} \delta\rho, \hat{\rho}^{(0)} \right] + [\hat{f}, \hat{\rho}^{(0)}], \quad (3.6)$$

gdje

$$\frac{\partial\hat{h}}{\partial\rho} \delta\rho = \sum_{ph} \frac{\partial\hat{h}}{\partial\rho_{ph}} \delta\rho_{ph} + \frac{\partial\hat{h}}{\partial\rho_{hp}} \delta\rho_{hp} + \sum_{ah} \frac{\partial\hat{h}}{\partial\rho_{ah}} \delta\rho_{ah} + \frac{\partial\hat{h}}{\partial\rho_{ha}} \delta\rho_{ha}. \quad (3.7)$$

Stacionarni dio Hamiltonijana je dan s  $\hat{h}_{kl}^{(0)} = \delta_{kl}\epsilon_k$ . U limesu malene amplitude, matrica  $\delta\rho$  također pokazuje oscilatornu ovisnost s  $e^{-i\omega t}$ , pa dobivamo RRPA jednadžbe gibanja

---

<sup>1</sup>no-sea approximation (eng.)

iz (3.6) [32, 35]

$$(\omega - \epsilon_p + \epsilon_h)\delta\rho_{ph} = f_{ph} + \sum_{p'h'} V_{ph'hp'}\delta\rho_{p'h'} + V_{pp'hh'}\delta\rho_{h'p'} + \sum_{\alpha'h'} V_{ph'h\alpha'}\delta\rho_{\alpha'h'} + V_{p\alpha'hh'}\delta\rho_{h'\alpha'}, \quad (3.8)$$

$$(\omega - \epsilon_\alpha + \epsilon_h)\delta\rho_{\alpha h} = f_{\alpha h} + \sum_{p'h'} V_{\alpha h'hp'}\delta\rho_{p'h'} + V_{\alpha p'hh'}\delta\rho_{h'p'} + \sum_{\alpha'h'} V_{\alpha h'h\alpha'}\delta\rho_{\alpha'h'} + V_{\alpha\alpha'hh'}\delta\rho_{h'\alpha'}, \quad (3.9)$$

$$(\omega - \epsilon_h + \epsilon_p)\delta\rho_{hp} = f_{hp} + \sum_{p'h'} V_{hh'pp'}\delta\rho_{p'h'} + V_{hp'ph'}\delta\rho_{h'p'} + \sum_{\alpha'h'} V_{hh'p\alpha'}\delta\rho_{\alpha'h'} + V_{h\alpha'ph'}\delta\rho_{h'\alpha'}, \quad (3.10)$$

$$(\omega - \epsilon_h + \epsilon_\alpha)\delta\rho_{h\alpha} = f_{h\alpha} + \sum_{p'h'} V_{hh'\alpha p'}\delta\rho_{p'h'} + V_{hp'\alpha h'}\delta\rho_{h'p'} + \sum_{\alpha'h'} V_{hh'\alpha\alpha'}\delta\rho_{\alpha'h'} + V_{h\alpha'ph'}\delta\rho_{h'\alpha'}, \quad (3.11)$$

gdje su matrični elementi rezidualne interakcije dani s

$$V_{abcd} = \frac{\partial h_{ac}}{\partial \rho_{db}} = \int \bar{\psi}_a(\mathbf{r}_1)\bar{\psi}_b(\mathbf{r}_2)V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)\psi_c(\mathbf{r}_1)\psi_d(\mathbf{r}_2)d^3r_1d^3r_2. \quad (3.12)$$

Zapisano u matričnoj formi imamo

$$\left[ \omega \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & A^* \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ \bar{F} \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

RRPA matrice A i B glase

$$A = \begin{pmatrix} (\epsilon_p - \epsilon_h)\delta_{pp'}\delta_{hh'} & \\ & (\epsilon_\alpha - \epsilon_h)\delta_{\alpha\alpha'}\delta_{hh'} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V_{ph'hp'} & V_{ph'h\alpha'} \\ V_{\alpha h'hp'} & V_{\alpha h'h\alpha'} \end{pmatrix}, \quad (3.14)$$

$$B = \begin{pmatrix} V_{pp'hh'} & V_{p\alpha'hh'} \\ V_{\alpha p'hh'} & V_{\alpha\alpha'hh'} \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

gdje su amplitude X i Y definirane s

$$X = \begin{pmatrix} \delta\rho_{ph} \\ \delta\rho_{\alpha h} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} \delta\rho_{hp} \\ \delta\rho_{h\alpha} \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

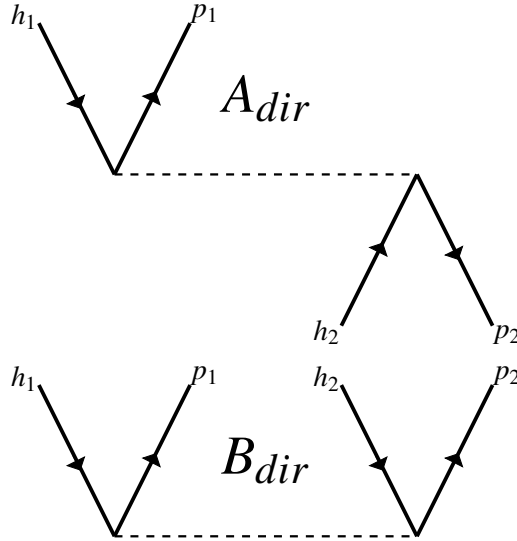
dok su matrični elementi vanjskog polja dani s

$$F = \begin{pmatrix} f_{ph} \\ f_{ah} \end{pmatrix}, \quad \bar{F} = \begin{pmatrix} f_{hp} \\ f_{h\alpha} \end{pmatrix}. \quad (3.17)$$

Kod kanala s izmjenom naboja <sup>1</sup>  $ph$  konfiguracije se grade iz parova protona i neutrona. Ako nezauzeta i zauzeta protonska (neutronska) stanja označimo s  $p$  i  $\bar{p}$  ( $n$  i  $\bar{n}$ ) RRPA matrica (3.14) se svodi na [34]

$$\begin{pmatrix} (\epsilon_p - \epsilon_h)\delta_{pp'}\delta_{nn'} + V_{p\bar{n}'\bar{n}p'} & -V_{pn'\bar{n}\bar{p}'} \\ -V_{np'\bar{p}\bar{n}'} & -(\epsilon_p - \epsilon_h)\delta_{pp'}\delta_{nn'} + V_{n\bar{p}'\bar{p}n'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{p'\bar{n}'} \\ Y_{n'\bar{p}'} \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} X_{p'\bar{n}'} \\ Y_{n'\bar{p}'} \end{pmatrix}. \quad (3.18)$$

Problem se reducira u dimenziji zbog sačuvanja naboja. Pobuđena stanja u ovoj teoriji gradimo na Hartree razini što znači da se samo zadržavamo na direktnim članovima. Grafički, matrični elementi A i B (3.14) za direktne doprinose  $ph$  interakcije su prikazani na slici (3.2).



Slika 3.2: (gore) Grafički je prikazan direktni dio matričnog elementa A u (3.14), poništava se par  $p_2h_2$  i stvara  $p_1h_1$ . (dolje) Prikazan je direktni dio matričnog elementa B iz (3.14), odgovara virtualnom  $2p2h$  pobuđenju. Slika je napravljena po uzoru na [37].

---

<sup>1</sup>charge-exchange (eng.)

### 3.2 Relativistička kvazičestična aproksimacija slučajne faze na konačnoj temperaturi (FT-RQRPA)

Uključivanje efekata konačne temperature i BCS korelacija sparivanja provest ćemo prema Sommermannovom članku [38]. BCS teoriju u RMFT smo već uveli u poglavlju (2). Idemo sada razviti formalizam za izračun pobuđenja. Izvod započinjemo zamjenom energijskog funkcionala gustoće velekanonskim potencijalom  $\Omega$  uvodeći velekanonski ansambl. Srednju vrijednost neke opservable  $\hat{A}$  možemo izraziti preko matrice gustoće  $\hat{\rho}$

$$\langle \hat{A} \rangle = \text{Tr}[\hat{\rho}\hat{A}]. \quad (3.19)$$

Uvjet ravnoteže sustava na temperaturi  $T$  i kemijskog potencijala  $\mu$  se dobiva minimizacijom velekanonskog potencijala

$$\Omega = E - \mu N - TS, \quad (3.20)$$

gdje je  $E$  prosječna energija,  $N$  prosječni broj čestica, a  $S$  entropija, te su dani s

$$E = \text{Tr}[\hat{\rho}H], \quad (3.21)$$

$$N = \text{Tr}[\hat{\rho}N], \quad (3.22)$$

$$S = -k \text{Tr}[\hat{\rho} \ln \hat{\rho}]. \quad (3.23)$$

Uvjet ravnoteže (stacionarnosti) i stabilnost rješenja možemo izraziti kao

$$\frac{\delta \Omega}{\delta \rho} = 0, \quad (\text{stacionarnost}), \quad (3.24)$$

$$\frac{\delta^2 \Omega}{\delta \rho^2} > 0, \quad (\text{stabilnost}). \quad (3.25)$$

Formalno rješenje uvjeta stacionarnosti glasi

$$\hat{\rho} = Z^{-1} \exp(-\beta(H - \mu N)), \quad (3.26)$$

gdje je  $Z$  particijska funkcija

$$Z = \text{Tr}[\exp(-\beta(H - \mu N))], \quad (3.27)$$

a  $\beta^{-1} = kT$ . U slučaju sustava neinteragirajućih čestica (kvazi-čestica) operator gustoće se svodi na

$$\hat{\rho} = \prod_{\nu} [f_{\nu} a_{\nu}^{\dagger} a_{\nu} + (1 - f_{\nu}) a_{\nu} a_{\nu}^{\dagger}], \quad (3.28)$$

gdje su  $a_\nu^\dagger$  i  $a_\nu$  operatori stvaranja i poništenja stanja  $\nu$  s energijom  $E_\nu$ , dok je  $f_\nu$  Fermi-Dirac funkcija raspodjele vjerojatnosti

$$f_\nu = [1 + \exp(E_\nu/kT)]^{-1}. \quad (3.29)$$

U nastavku je potrebno pronaći izraz za vremensku evoluciju operatora gustoće za linearnu pobudu, slično kao i za slučaj u prethodnom potpoglavlju. Jednadžba gibanja operatora gustoće je dana s

$$\hat{\rho}(t) = U(t, t_0)\hat{\rho}(t_0)U^\dagger(t, t_0), \quad (3.30)$$

gdje je  $U(t, t_0)$  unitarna transformacija. U odsutnosti vanjskog polja jednadžba gibanja operatora vremenske translacije je

$$i\hbar \frac{d}{dt}U(t, t_0) = HU(t, t_0), \quad (3.31)$$

pa kombinacijom izraza (3.30) i (3.31) imamo

$$i\hbar \frac{d}{dt}\hat{\rho}(t) = [H, \hat{\rho}(t)]. \quad (3.32)$$

Kod razmatranja unutar velekanonskog ansambla Hamiltonijan  $H$  potrebno je zamijeniti s velekanonskim potencijalom  $\Omega$ . Imamo

$$i\hbar \frac{d}{dt}\hat{\rho}(t) = [H - \mu N + F(t), \hat{\rho}(t)]. \quad (3.33)$$

Operator gustoće  $\hat{\rho}(t)$  razvijamo do prvog reda

$$\hat{\rho}(t) = \hat{\rho}_0 + \hat{\rho}_1(t) + \dots, \quad (3.34)$$

pa uvrštavanjem u (3.33) dolazimo do

$$i\hbar \frac{d}{dt}\hat{\rho}_1(t) + [\hat{\rho}_1(t), H - \mu N] = -[\hat{\rho}_0, F(t)]. \quad (3.35)$$

Općenitu unitarnu operaciju simetrije možemo zapisati pomoću hermitskog operatora  $W(t, t_0)$  kao

$$U(t) = e^{iW(t)}, \quad (3.36)$$



koju budući da je  $F(t)$  slabo vezanje s vanjskim poljem možemo razviti u red

$$U(t) = 1 + iW(t) + \frac{i^2}{2}W^2(t) + \dots \quad (3.37)$$

Operator gustoće (3.34) sada možemo prikazati kao [38]

$$\hat{\rho}_0 = \hat{\rho}(t_0), \quad (3.38)$$

$$\hat{\rho}_1(t) = i[W(t), \hat{\rho}(t_0)]. \quad (3.39)$$

Pojedine jednočestične komponente u jednadžbi (3.33) možemo izolirati množenjem s operatorima  $a_a^\dagger a_b$  i  $a_a^\dagger a_b^\dagger$  pa imamo [38]

$$i\hbar \text{Tr}[\dot{\rho}_1 a_a^\dagger a_b] + \text{Tr}[[\rho_1, H - \mu N], a_a^\dagger a_b] = -\text{Tr}[[\rho_0, F], a_a^\dagger a_b], \quad (3.40)$$

$$i\hbar \text{Tr}[\dot{\rho}_1 a_a^\dagger a_b^\dagger] + \text{Tr}[[\rho_1, H - \mu N], a_a^\dagger a_b^\dagger] = -\text{Tr}[[\rho_0, F], a_a^\dagger a_b^\dagger]. \quad (3.41)$$

Ako izrazimo  $\hat{\rho}_1(t)$  preko (3.38) te iskoristimo cikličnost traga i definiciju srednje vrijednosti preko matrice gustoće dolazimo do [38]

$$i\hbar \frac{d}{dt} \langle [W, a_a^\dagger a_b] \rangle + \langle [W, [H - \mu N, a_a^\dagger a_b]] \rangle = -\langle [F, a_a^\dagger a_b] \rangle, \quad (3.42)$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} \langle [W, a_a^\dagger a_b^\dagger] \rangle + \langle [W, [H - \mu N, a_a^\dagger a_b^\dagger]] \rangle = -\langle [F, a_a^\dagger a_b^\dagger] \rangle. \quad (3.43)$$

Računanjem komutatora te srednjih vrijednosti dolazimo do QRPA jednadžbi gibanja [38, 39]

$$\begin{pmatrix} \tilde{C} & \tilde{a} & \tilde{b} & \tilde{D} \\ \tilde{a}^\dagger & \tilde{A} & \tilde{B} & \tilde{b}^T \\ -\tilde{b}^\dagger & -\tilde{B}^* & -\tilde{A}^* & -\tilde{a}^T \\ -\tilde{D}^* & -\tilde{b}^* & -\tilde{a}^* & -\tilde{C}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{P} \\ \tilde{X} \\ \tilde{Y} \\ \tilde{Q} \end{pmatrix} = E_\nu \begin{pmatrix} \tilde{P} \\ \tilde{X} \\ \tilde{Y} \\ \tilde{Q} \end{pmatrix}, \quad (3.44)$$

pri čemu smo koristili pokrate

$$\tilde{A}_{abcd} = \sqrt{1 - f_a - f_b} A'_{abcd} \sqrt{1 - f_c - f_d} + (E_a + E_b) \delta_{ac} \delta_{bd}, \quad (3.45)$$

$$\tilde{B}_{abcd} = \sqrt{1 - f_a - f_b} B_{abcd} \sqrt{1 - f_c - f_d}, \quad (3.46)$$

$$\tilde{C}_{abcd} = \sqrt{f_b - f_a} C'_{abcd} \sqrt{f_d - f_c} + (E_a - E_b) \delta_{ac} \delta_{bd}, \quad (3.47)$$

$$\tilde{D}_{abcd} = \sqrt{f_b - f_a} D_{abcd} \sqrt{f_d - f_c}, \quad (3.48)$$

$$\tilde{a}_{abcd} = \sqrt{f_b - f_a} a_{abcd} \sqrt{1 - f_c - f_d}, \quad (3.49)$$

$$\tilde{b}_{abcd} = \sqrt{f_b - f_a} b_{abcd} \sqrt{1 - f_c - f_d}, \quad (3.50)$$

dok za amplitude vrijedi [38, 39]

$$\tilde{X}_{ab} = X_{ab} \sqrt{1 - f_a - f_b}, \quad (3.51)$$

$$\tilde{Y}_{ab} = Y_{ab} \sqrt{1 - f_a - f_b}, \quad (3.52)$$

$$\tilde{P}_{ab} = P_{ab} \sqrt{f_b - f_a}, \quad (3.53)$$

$$\tilde{Q}_{ab} = Q_{ab} \sqrt{f_b - f_a}. \quad (3.54)$$

Matrice  $\tilde{A}$  i  $\tilde{B}$  opisuju pobuđenja kvazičestičnih parova te preživljavaju i na temperaturi nula. Uvjet normalizacije glasi

$$\sum_{a \geq b} |\tilde{X}_{ab}^\nu|^2 - |\tilde{Y}_{ab}^\nu|^2 + |\tilde{P}_{ab}^\nu|^2 - |\tilde{Q}_{ab}^\nu|^2 = 1. \quad (3.55)$$

FT-RQRPA matrični elementi u BCS limesu su dani s [38, 39]

$$\begin{aligned} A_{abcd}' &= (u_a u_b u_c u_d + v_a v_b v_c v_d) V_{abcd}^{pp} \\ &+ (u_a v_b u_c v_d + v_a u_b v_c u_d) V_{ad\bar{b}c}^{ph} \\ &- (u_a v_b v_c u_d + v_a u_b u_c v_d) V_{a\bar{c}\bar{b}d}^{ph}, \end{aligned} \quad (3.56)$$

$$\begin{aligned} B_{abcd} &= (u_a v_b v_c u_d + v_a u_b u_c v_d) V_{ad\bar{c}\bar{b}}^{ph} \\ &+ (u_a v_b u_c v_d + v_a u_b v_c u_d) V_{ac\bar{b}\bar{d}}^{ph} \\ &- (u_a u_b v_c v_d + v_a v_b u_c u_d) V_{ab\bar{c}\bar{d}}^{pp}, \end{aligned} \quad (3.57)$$

$$\begin{aligned} C_{abcd}' &= (u_a u_b u_c u_d + v_a v_b v_c v_d) V_{adbc}^{pp} \\ &- (u_a v_b u_c v_d + v_a u_b v_c u_d) V_{ab\bar{d}c}^{ph} \\ &+ (u_a u_b v_c v_d + v_a v_b u_c u_d) V_{a\bar{c}\bar{d}b}^{ph}, \end{aligned} \quad (3.58)$$

$$\begin{aligned} D_{abcd} &= (u_a u_b u_c u_d + v_a v_b v_c v_d) V_{abcd}^{pp} \\ &- (u_a v_b v_c u_d + v_a u_b u_c v_d) V_{a\bar{b}\bar{c}d}^{ph} \\ &+ (u_a u_b v_c v_d + v_a v_b u_c u_d) V_{ad\bar{c}\bar{b}}^{ph}, \end{aligned} \quad (3.59)$$

$$\begin{aligned}
a_{abcd} = & (v_a u_b v_c v_d - u_a v_b u_c u_d) V_{a\bar{b}cd}^{pp} \\
& - (v_a v_b u_c v_d - u_a u_b v_c u_d) V_{a\bar{c}b\bar{d}}^{ph} \\
& + (v_a v_b v_c u_d - u_a u_b u_c v_d) V_{a\bar{d}bc}^{ph},
\end{aligned} \tag{3.60}$$

$$\begin{aligned}
b_{abcd} = & (v_a u_b u_c u_d - u_a v_b v_c v_d) V_{a\bar{b}cd}^{pp} \\
& - (v_a v_b u_c v_d - u_a u_b v_c u_d) V_{adb\bar{c}}^{ph} \\
& + (v_a v_b v_c u_d - u_a u_b u_c v_d) V_{acbd}^{ph}.
\end{aligned} \tag{3.61}$$

Gdje su sa povlakama iznad simbola označena konjugirana BCS stanja [38].  $V^{pp}$  i  $V^{ph}$  predstavljaju  $pp$  i  $ph$  rezidualnu interakciju. Kod DD-ME2 potencijala za rezidualnu interakciju imamo doprinose od  $\sigma, \omega, \rho$  mezona, te od kulonske interakcije koje glase

- $\sigma$ -mezon :

$$\begin{aligned}
V_\sigma(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = & -\gamma^{0(1)} \gamma^{0(2)} g_\sigma(\rho_v(\mathbf{r})) g_\sigma(\rho_v(\mathbf{r}')) D_\sigma(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \\
& - \left[ \gamma^{0(2)} \mathbb{1}^{(1)} g_\sigma(\rho_v(\mathbf{r})) g'_\sigma(\rho_v(\mathbf{r}')) \rho_s(\mathbf{r}') + \mathbb{1}^{(1)} \mathbb{1}^{(2)} g'_\sigma(\rho_v(\mathbf{r})) g'_\sigma(\rho_v(\mathbf{r}')) \rho_s(\mathbf{r}) \rho_s(\mathbf{r}') \right. \\
& + \left. \mathbb{1}^{(1)} \gamma^{0(2)} g'_\sigma(\rho_v(\mathbf{r})) g_\sigma(\rho_v(\mathbf{r}')) \rho_s(\mathbf{r}) \right] D_\sigma(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \\
& - \left[ \gamma^{0(1)} \mathbb{1}^{(2)} g'_\sigma(\rho_v(\mathbf{r})) + \mathbb{1}^{(1)} \mathbb{1}^{(2)} \rho_s(\mathbf{r}) g''_\sigma(\rho_v(\mathbf{r})) \right. \\
& + \left. \mathbb{1}^{(1)} \gamma^{0(2)} g'_\sigma(\rho_v(\mathbf{r})) \right] \frac{I_\sigma(r)}{r} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}').
\end{aligned} \tag{3.62}$$

- $\omega$ -mezon :

$$\begin{aligned}
V_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = & (\gamma^0 \gamma_\mu)^{(2)} (\gamma^0 \gamma^\mu)^{(1)} g_\omega(\rho_v(\mathbf{r}')) g_\omega(\rho_v(\mathbf{r})) D_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \\
& + \frac{I_\omega(r)}{r} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \left[ 2g'_\omega(\rho_v(\mathbf{r})) + \rho_v(\mathbf{r}) g''_\omega(\rho_v(\mathbf{r})) \right] \mathbb{1}^{(1)} \mathbb{1}^{(2)} \\
& + D_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \left[ \rho_v(\mathbf{r}) \rho_v(\mathbf{r}') g'_\omega(\rho_v(\mathbf{r})) g'_\omega(\rho_v(\mathbf{r}')) \right. \\
& + \left. \rho_v(\mathbf{r}) g'_\omega(\rho_v(\mathbf{r})) g_\omega(\rho_v(\mathbf{r}')) + \rho_v(\mathbf{r}') g_\omega(\rho_v(\mathbf{r})) g'_\omega(\rho_v(\mathbf{r}')) \right] \mathbb{1}^{(1)} \mathbb{1}^{(2)},
\end{aligned} \tag{3.63}$$

- $\rho$ -mezon :

$$\begin{aligned}
V_\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = & (\gamma^0 \gamma^\mu \vec{\tau})^{(1)} (\gamma^0 \gamma_\mu \vec{\tau})^{(2)} g_\rho(\rho_v(\mathbf{r})) g_\rho(\rho_v(\mathbf{r}')) D_\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \\
& + \frac{I_\rho(\mathbf{r})}{r} \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \mathbb{1}^{(1)} \mathbb{1}^{(2)} \left[ g'_\rho(\rho_v(\mathbf{r})) \tau_1^3 + g'_\rho(\rho_v(\mathbf{r})) \tau_2^3 + \rho_{tv}(\mathbf{r}) g''_\rho(\rho_v(\mathbf{r})) \right] \\
& + D_\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbb{1}^{(1)} \mathbb{1}^{(2)} \left[ g_\rho(\rho_v(\mathbf{r})) g'_\rho(\rho_v(\mathbf{r}')) \rho_{tv}(\mathbf{r}') \tau_1^3 \right. \\
& + \rho_{tv}(\mathbf{r}) g'_\rho(\rho_v(\mathbf{r})) g'_\rho(\rho_v(\mathbf{r}')) \rho_{tv}(\mathbf{r}') \tau_2^3 \\
& \left. + \rho_{tv}(\mathbf{r}) g'_\rho(\rho_v(\mathbf{r})) g_\rho(\rho_v(\mathbf{r}')) D_\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right],
\end{aligned} \tag{3.64}$$

- kulonski član [35] :

$$V_c(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = e^2 (\gamma^0 \gamma^\mu)^{(1)} (\gamma^0 \gamma_\mu)^{(2)} (\mathbf{r}, \mathbf{r}'). \tag{3.65}$$

Svi propagatori koji se pojavljuju u gornjim izrazima imaju oblik Yukawa propagatora

$$D_\phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-m_\phi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \tag{3.66}$$

Definicije preostalih izraza te detaljan izvod rezidualne interakcije pojedinih mezona se može naći u Dodatku (B), gdje su također izračunati i odgovarajući matrični elementi. Za rezidualnu interakciju u  $pp$  kanalu koristimo

$$V^{pp}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -V_0 \sum_{j=1}^2 g_j e^{-(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2 / \mu_j^2} \prod_{S=1, T=0}, \tag{3.67}$$

gdje je  $\prod_{S=1, T=0}$  projektor na stanja ukupnog spina  $S = 1$  i izospina  $T = 0$ . Za parametre smo odabrali  $\mu_1 = 1.2$  fm,  $\mu_2 = 0.7$  fm, dok su relativne jakosti  $g_1 = 1, g_2 = -2$ .  $V_0$  je slobodan parametar kojeg detaljno diskutiramo u poglavlju (6).

U razmatranju osnovnog stanja na nivou RMFT doprinos od izmjene jednog piona je iščezavao zbog narušavanja pariteta. No, budući da je pion-nukleon vezanje derivativnog tipa uključujemo u rezidualnu interakciju kontaktni Landau-Migdal član koji je oblika [40]

$$V_{\delta\pi} = g' \left( \frac{f_\pi}{m_\pi} \right)^2 \vec{\tau}_1 \vec{\tau}_2 \Sigma_1 \Sigma_2 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \tag{3.68}$$

gdje za parametre koristimo standardne vrijednosti [40]  $m_\pi = 138$  MeV,  $\frac{f_\pi^2}{4\pi} = 0.08$ , dok je parametar  $g'$  naštiman tako da se vjerno reproducira Gamow-Teller rezonancija na  $^{208}\text{Pb}$  te koristimo  $g' = 0.52$  [40]. Izvod matričnog elementa za kontaktnu interakciju je također dan u Dodatku (B).

Operator stvaranja stanja  $\nu$  u QRPA glasi [39]

$$\Gamma_\nu^\dagger = \sum_{a \geq b} \left\{ X_{ab}^\nu a_a^\dagger a_b^\dagger - Y_{ab}^\nu a_b a_a + P_{ab}^\nu a_a^\dagger a_b - Q_{ab}^\nu a_b^\dagger a_a \right\}, \quad (3.69)$$

a njegovo djelovanje na QRPA osnovno stanje je

$$|\nu\rangle = \Gamma_\nu^\dagger |\text{QRPA}\rangle, \quad (3.70)$$

dok za operator anihilacije  $\Gamma_\nu$  imamo

$$\Gamma_\nu |\text{QRPA}\rangle = 0. \quad (3.71)$$

Reduciranu vjerojatnost prijelaza za neki operator  $\hat{F}_J$  računamo iz [39]

$$B_\nu = |\langle \nu || \hat{F}_J || \text{QRPA} \rangle|^2 = \left| \sum_{c \geq d} \left[ (\tilde{X}_{cd}^\nu + \tilde{Y}_{cd}^\nu)(v_c u_d + u_c v_d) \sqrt{1 - f_c - f_d} \right. \right. \\ \left. \left. + (\tilde{P}_{cd}^\nu + \tilde{Q}_{cd}^\nu)(u_c u_d - v_c v_d) \sqrt{f_d - f_c} \right] \langle c || \hat{F}_J || d \rangle \right|^2. \quad (3.72)$$

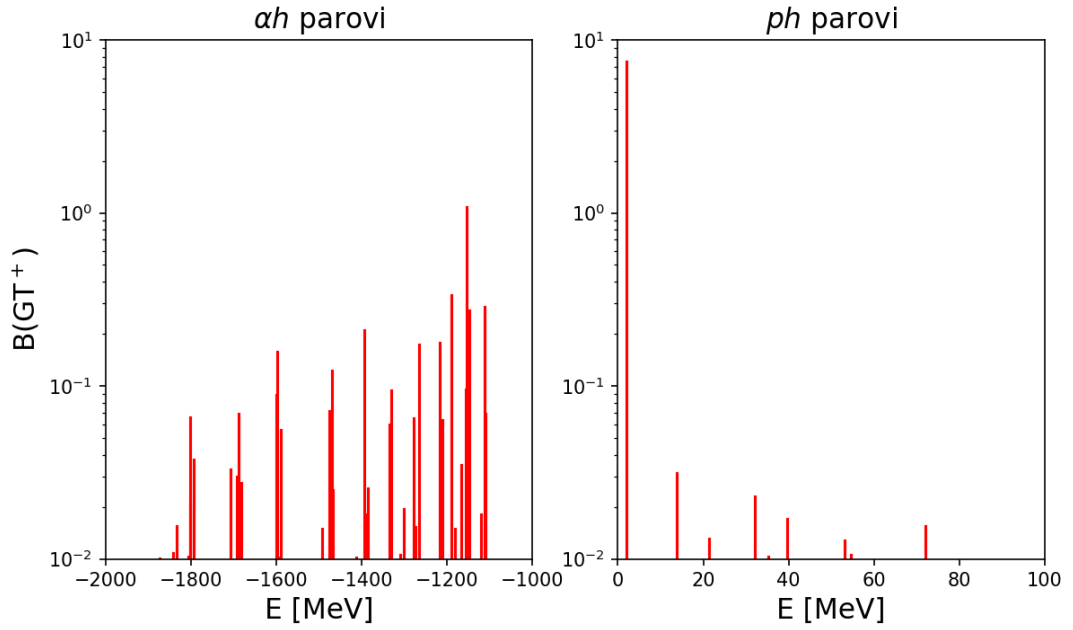
Za Gamow-Teller prijelaze koji su nam najznačajniji u ovom radu za operator  $\hat{F}_J$  vrijedi

$$\hat{F}_{GTR}^\pm = \sum_{i=1}^A [1 \otimes \sigma(i)]_{J=1} \tau_\pm(i). \quad (3.73)$$

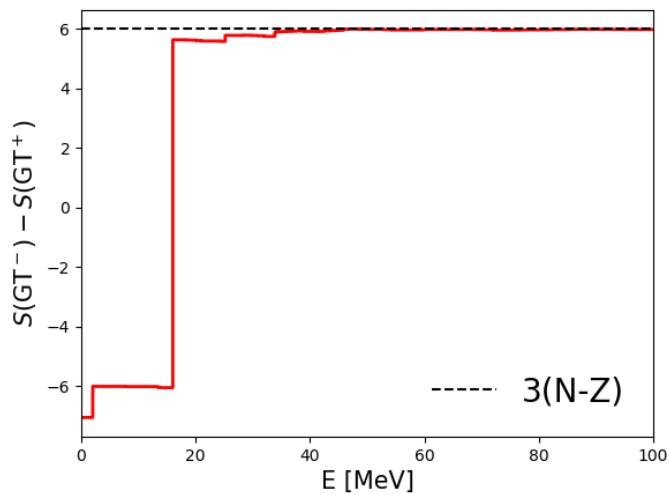
Za provjeru konzistentnosti našeg modela koristimo se Ikeda pravilom sume [34]

$$S_{GTR}^- - S_{GTR}^+ = 3(N - Z), \quad (3.74)$$

gdje smo označili  $S_{GTR}^\pm = \sum_\nu B_{\nu, GTR}^\pm$ . Za reproduciranje Ikeda pravila sume iz Gamow-Teller spektra prijelazne snage, osim  $ph$  parova, potrebno je uključiti i  $ah$  parove antičestica-šupljina [32, 40]. Primjer Gamow-Teller spektra prijelazne snage prikazan je na slici (3.3) za jezgru  $^{54}\text{Fe}$ , pri temperaturi  $T = 0.5$  MeV, a izračunat je u okviru FT-RRPA teorije. Vidimo da ukoliko u jednadžbu (3.74) uključimo i antičestične nivoe vjerno reproduciramo pravilo sume kao na slici (3.4). Kod daljnjih izračuna nećemo se zamarati s antičestičnim stanjima budući da ne utječu na prijelaznu snagu na pozitivnim energijama pobuđenja, već ćemo samo razmatrati čestična.



Slika 3.3: Prikaz  $GT^+$  spektra prijelazne snage za jezgru  $^{54}\text{Fe}$ , pri temperaturi  $T = 0.5$  MeV, izračunatog u okviru FT-RRPA teorije. Lijevo su prikazani doprinosi antičestičnih ( $ah$ ) stanja, dok se desno nalaze čestična stanja ( $ph$ ). Vidimo da se potrebno spustiti na energije ispod 1000 MeV kako bi dobili doprinose antičestičnih stanja.



Slika 3.4: Razlika kumulativnih suma  $S_{GTR}^- - S_{GTR}^+$  za  $^{54}\text{Fe}$ . Crna iscrtkana linija prikazuje vrijednost  $3(N-Z)$  koju bi zadovoljavalo Ikeda pravilo sume. U slučaju uključivanja antičestičnih stanja, vidimo da dolazimo do 100% ukupne vrijednosti pravila sume.

## 4 Teorija uhvata elektrona na atomskim jezgrama

Uхват elektrona na atomskim jezgrama snažno utječe na dinamiku razvoja zvijezda u fazi pred eksploziju supernove [6]. Reakciju možemo zapisati kao

$$e^- + {}^A_Z X_N \rightarrow {}^A_{Z-1} X_{N+1}^* + \nu_e, \quad (4.1)$$

iz čega vidimo da se reakcijom povećava broj neutrona, a smanjuje broj protona. U unutrašnjosti zvijezda se događa i inverzan proces uhvatu elektrona,  $\beta$ -raspad

$${}^A_Z X_N \rightarrow {}^A_{Z+1} X_{N-1} + \bar{\nu}_e + e^-. \quad (4.2)$$

Sudbina zvijezde neposredno prije konačnog kolapsa ovisi o ravnoteži između ova dva procesa. Pri dovoljno visokim temperaturama uхват elektrona postaje dominantan proces, efektivni broj protona se smanjuje, a time i odbojna kulonska interakcija te može doći do daljnjeg kolapsa. Reakcije uhvata elektrona spadaju u skupinu semileptonskih reakcija slabe nuklearne sile. Primjer takvih reakcija su također i raspršenje (anti)neutrina te već spomenuti  $\beta$ -raspad. Kod naših proračuna možemo se ograničiti samo na tzv. nuklearnu domenu u kojoj razmatramo samo Hilbertov prostor koji se sastoji od  $(u, d)$  kvarkova i odgovarajućih antikvarkova [41, 42]

$$\psi = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

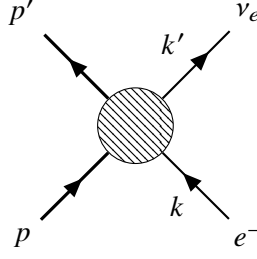
čime sada Lagrangijan jake nuklearne sile ima egzaktnu  $SU(2)$  simetriju. U tom slučaju Fermijeva konstanta nam postaje

$$G = G \cos \theta_C, \quad (4.4)$$

pri čemu je  $\theta_C$  Cabibbov kut. U nuklearnoj fizici se za slabu silu koristi Fermijev kontaktni tip interakcije, čiji Hamiltonijan interakcije u Schrödingerovoj slici ima oblik struja-struja interakcije [41, 42]

$$\hat{H}_W = -\frac{G}{\sqrt{2}} \int d^3x j_\mu^{lept}(\mathbf{x}) \hat{\mathcal{J}}_\mu(\mathbf{x}), \quad (4.5)$$

gdje je  $G$  Fermijeva konstanta,  $j_\mu^{lept}(\mathbf{x})$  leptonska struja, a  $\hat{\mathcal{J}}_\mu(\mathbf{x})$  hadronska struja. Efektivni Feynmanov dijagram za ovakvu vrstu interakcije kod procesa uhvata elektrona se nalazi na slici (4.1).



Slika 4.1: Feynmanov dijagram reakcije uhvata elektrona.  $p$  i  $p'$  označavaju jezgru prije i nakon uhvata,  $e^-$  je upadni elektron, a  $\nu_e$  izlazni neutrino. Središnje zdebljanje označava struja-struja interakciju. Slika je napravljena uz pomoć paketa [43].

Prije nego što krenemo s izvodom potrebno je napraviti neke pretpostavke za izračun matričnih elemenata. S-matrični element dijagrama na slici (4.1) može se zapisati kao [42, 44]

$$\langle f | S | i \rangle = (-i) \frac{1}{\Omega} \bar{u}(k') \gamma_\mu (1 - \gamma_5) u(k) \left( \frac{G}{\sqrt{2}} \right) \int d^4 x e^{i(k-k') \cdot x} \langle p' | \mathcal{J}_\mu(x) | p \rangle. \quad (4.6)$$

U izrazu (4.6) smo se zadržali na prvom redu računa smetnje s obzirom na leptonske struje,  $k$  i  $k'$  su 4-impulsi elektrona odnosno neutrina, a  $p$  i  $p'$  se odnose na jezgru.  $\Omega$  je normalizacijski volumen<sup>1</sup>. Ako iskoristimo Heisenbergovu jednadžbu gibanja [41] možemo se riješiti koordinatne ovisnosti hadronske struje te imamo

$$\langle f | S | i \rangle = -\frac{G}{\sqrt{2}\Omega} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k + p - k' - p') \bar{u}(k') \gamma_\mu (1 - \gamma_5) u(k) \langle p' | \mathcal{J}_\mu(0) | p \rangle. \quad (4.7)$$

Hadronsku struju rastavimo na vektorski i aksijalni dio

$$\mathcal{J}_\mu = J_\mu + J_{\mu 5}. \quad (4.8)$$

Sada iskoristimo argumente Lorentz invarijantnosti, paritetne invarijantnosti i izospinske invarijantnosti kako bi zapisali najopćenitiji oblik gornjih matričnih elemenata [41, 44, 45]

$$\begin{aligned} \langle p' | J_\mu | p \rangle &= \frac{1}{\Omega} \bar{u}(p') [F_1 \gamma_\mu + F_2 \sigma_{\mu\nu} q_\nu + i F_S q_\mu] \tau_- u(p), \\ \langle p' | J_{\mu 5} | p \rangle &= \frac{1}{\Omega} \bar{u}(p') [F_A \gamma_5 \gamma_\mu - F_T \gamma_5 \sigma_{\mu\nu} q_\nu - i F_P \gamma_5 q_\mu] \tau_- u(p). \end{aligned} \quad (4.9)$$

U gornjim izrazima se pojavljuju karakteristični form-faktori  $F_1, F_2, F_S, F_A, F_T, F_P$  koje ćemo izvrijedniti u nastavku, zatim  $q_\mu = k_\mu - k'_\mu$  odgovara prijenosu impulsa, a  $\tau_-$  je matrica spuštanja izospina.

---

<sup>1</sup>Koristimo normalizaciju kao u [41]



#### 4.1 Sačuvana vektorska struja (CVC)

Izračuni matričnih elemenata se značajno pojednostavljaju ako pretpostavimo teoriju sačuvanja vektorske struje (CVC)<sup>1</sup>. Teorija se zasniva na postojanju "sličnosti" između teorija koje uključuju elektromagnetsku i slabu interakciju. CVC implicira da se vektorski dio reakcija slabe sile sa izmjenom naboja može dobiti iz elastičnog raspršenja određenog elektromagnetskom interakcijom [41]. Za motivaciju gornje tvrdnje slijedimo primjer u [41]. Krenimo od struje slabe interakcije za reakciju u kojoj dolazi do promjene naboja, uz pretpostavku točkastih nukleona

$$\mathcal{J}_\lambda^{(+)} = \bar{\psi}_p \gamma_\lambda (1 - \gamma_5) \psi_n. \quad (4.10)$$

Donji indeks se odnosi na Lorentzove transformacije, a gornji na izospin. Nukleone zapišimo pomoću izodubleta

$$\psi = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}, \quad (4.11)$$

te uvedimo operatore stvaranja i poništenja izospina, te treću komponentu izospina

$$\tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \tau_+ = \frac{1}{2}(\tau_1 + i\tau_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \tau_- = \frac{1}{2}(\tau_1 - i\tau_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.12)$$

Tada izraz (4.10) možemo pisati kao

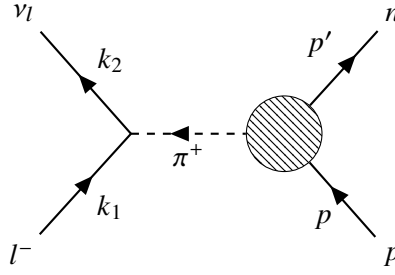
$$\mathcal{J}_\lambda^{(+)} = \bar{\psi} \gamma_\lambda (1 + \gamma_5) \frac{1}{2}(\tau_1 + i\tau_2) \psi = J_\lambda^{(+)} + J_{\lambda 5}^{(+)}. \quad (4.13)$$

S druge strane, elektromagnetska struja je dana s

$$J_\lambda^\gamma = \bar{\psi}_p \gamma_\lambda \psi_p = \bar{\psi} \gamma_\lambda \frac{1}{2}(1 + \tau_3) \psi. \quad (4.14)$$

---

<sup>1</sup>Conserved Vector Current (eng.)



Slika 4.2: Doprinos pionskog pola.

Iako hadronska struja sama po sebi može imati vrlo kompliciranu strukturu, pogledajmo simetrijska svojstva struja. Vrijede sljedeće općenite relacije

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_\lambda &= J_\lambda + J_{\lambda 5} && \text{; V-A,} \\
\mathcal{J}_\lambda^{(\pm)} &= \mathcal{J}_\lambda^{V_1} \pm i\mathcal{J}_\lambda^{V_2} && \text{; Izovektor,} \\
J_\lambda^\gamma &= J_\lambda^S + J_\lambda^{V_3} && \text{; EM-struja,} \\
J_\lambda^{(\pm)} &= J_\lambda^{V_1} \pm J_\lambda^{V_2} && \text{; CVC.}
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Prva relacija govori o standardnom *vektor - aksijalni vektor* obliku struje slabe interakcije. Druga jednadžba kaže da je struja slabe interakcije u reakcijama s promjenom naboja izovektor. Treća relacija govori da je elektromagnetska struja suma skalarnog i izoskalarnog dijela, a posljednja je tvrdnja CVC-a. Lorentz vektorski dio slabe struje s izmjenom naboja je zbroj preostalih izospinskih komponenti elektromagnetske struje. Primjenom Wigner-Eckartovog teorema na izospin možemo povezati matrične elemente slabe i elektromagnetske struje.

## 4.2 Doprinos pionskog pola

Promotrimo Feynmanov dijagram kao na slici (4.2). Promatramo reakciju  $l^- + p \rightarrow \nu_l + n$ . S-matrični element gornjeg procesa pišemo kao

$$\begin{aligned}
S_{fi} &= \frac{(2\pi)^4}{\Omega^2} \delta^{(4)}(p + k_1 - p' - k_2) \frac{GF_\pi}{\sqrt{2}} q_\lambda \bar{u}(k_2) \gamma_\lambda (1 - \gamma_5) u(k_1) \frac{1}{q^2 + m_\pi^2} \times \\
&\quad \times \bar{u}(p') g_\pi \gamma_5 \sqrt{2} \tau_- u(p),
\end{aligned} \tag{4.16}$$

$q$  je prijenos impulsa,  $m_\pi$  je masa piona,  $F_\pi$  je strukturni faktor koji sadrži matrične elemente izmjene piona. S druge strane, ukoliko promotrimo relaciju (4.9) dobivenu iz općih argumenata simetrije, možemo pisati

$$S_{fi} = \frac{-iG}{\sqrt{2}} \frac{(2\pi)^4}{\Omega^2} \delta^{(4)}(p + k_1 - p' - k_2) \bar{u}(k_2) \gamma_\lambda (1 - \gamma_5) u(k_1) \bar{u}(p') \Gamma_\lambda u(p). \tag{4.17}$$

Usporedbom jednađbi (4.16) i (4.17) dolazimo do form-faktora [41]

$$F_P = \frac{-\sqrt{2}g_\pi F_\pi}{q^2 + m_\pi^2}. \quad (4.18)$$

### 4.3 Goldberger-Treiman relacija

Aksijalna vektorska struja je parcijalno sačuvana [41, 42]

$$\frac{\partial J_{\lambda 5}^V}{\partial x_\lambda} = O(m_\pi^2). \quad (4.19)$$

U nastavku izvoda koristimo Weinbergov teorem koji kaže da ako struje imaju ista transformacijska svojstva na vremensku inverziju  $\hat{T}$ , paritet  $\hat{P}$  i nabojnu konjugaciju  $\hat{C}$  tada u relacijama (4.9) vrijedi [46]

$$F_S = F_T = 0. \quad (4.20)$$

Promotrimo matični element između nukleona  $p$  i  $p'$

$$\begin{aligned} \langle p' | \frac{\partial J_{\lambda 5}^{(-)}(0)}{\partial x_\lambda} | p \rangle &= i q_\lambda \langle p' | J_{\lambda 5}^{(-)}(0) | p \rangle \\ &= \frac{i}{\Omega} \bar{u}(p') [F_A \gamma_5 i \gamma_\lambda q_\lambda + q^2 F_P \gamma_5] \tau_- u(p). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Kod prve jednakosti smo iskoristili Heisenbergovu jednađbu gibanja, a ispod nje relaciju (4.9). Nadalje vrijedi  $q = p - p'$  pa

$$\begin{aligned} \bar{u}(p') \gamma_5 (i \gamma_\lambda p_\lambda - i \gamma_\lambda p'_\lambda) u(p) &= \bar{u}(p') (\gamma_5 i \gamma_\lambda p_\lambda + i \gamma_\lambda p'_\lambda \gamma_5) u(p) \\ &= -2m \bar{u}(p') \gamma_5 u(p). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Konačno imamo

$$\langle p' | \frac{\partial J_{\lambda 5}^{(-)}(0)}{\partial x_\lambda} | p \rangle = \frac{i}{\Omega} \bar{u}(p') [-2m F_A + q^2 F_P] \gamma_5 \tau_- u(p). \quad (4.23)$$

Koristeći rezultat za pionski pol (4.18) i zanemarivanjem članova  $O(m_\pi^2)$

$$-2m F_A = \sqrt{2} g_\pi F_\pi. \quad (4.24)$$

#### 4.4 Izvod izraza za udarni presjek

Matrični element Hamiltonijana interakcije je dan s

$$\langle f | \hat{H}_W | i \rangle = -\frac{G}{\sqrt{2}} \int d^3x e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}} [\mathbf{l} \cdot \mathcal{J}(\mathbf{x}) - l_0 \mathcal{J}_0(\mathbf{x})]. \quad (4.25)$$

Općenito bilo koji vektor možemo rastaviti na bazu sferičnih tenzora

$$\mathbf{l} = \sum_{\lambda=0,\pm 1} l_\lambda \mathbf{e}_\lambda^\dagger, \quad (4.26)$$

gdje smo os  $z$  orijentirali u smjeru prijenosa impulsa  $\mathbf{q}$ . Za komponente jediničnih vektora vrijedi [41, 47]

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{\pm 1} &= \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_{q1} \pm i \mathbf{e}_{q2}), \\ \mathbf{e}_0 &= \mathbf{q}/|\mathbf{q}|, \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$\mathbf{e}_\lambda^\dagger \cdot \mathbf{e}_{\lambda'} = \delta_{\lambda,\lambda'} \quad \mathbf{e}_\lambda^\dagger = (-1)^\lambda \mathbf{e}_{-\lambda}.$$

U nastavku su nam potrebni sljedeći razvoji po multipolima koji su dokazani u Dodatku (A)

$$\mathbf{e}_{q\lambda} e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}} = - \sum_{J \geq 1} \sqrt{2\pi(2J+1)} i^J \left\{ \lambda j_J(\kappa x) \mathbf{y}_{JJ1}^\lambda + \frac{1}{\kappa} \nabla \times [j_J(\kappa x) \mathbf{y}_{JJ1}^\lambda] \right\} \quad , \lambda = \pm 1, \quad (4.28)$$

$$\mathbf{e}_{q0} e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}} = \frac{-i}{\kappa} \sum_{J \geq 0} \sqrt{4\pi(2J+1)} i^J \nabla [j_J(\kappa x) Y_{J0}] \quad , \lambda = 0. \quad (4.29)$$

Uvrštavanjem razvoja u (4.25) slijedi

$$\begin{aligned} \langle f | \hat{H}_W | i \rangle &= -\frac{G}{\sqrt{2}} \langle f | \left\{ \int d^3x \left[ \mathcal{J}(x) - \sum_{\lambda=\pm 1} l_\lambda \sum_{J \geq 1} (-i)^J \sqrt{2\pi(2J+1)} \left( \lambda j_J(\kappa x) \mathbf{y}_{JJ1}^\lambda \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{\kappa} \nabla \times [j_J(\kappa x) \mathbf{y}_{JJ1}^\lambda] \right) + \mathcal{J}(x) l_0 \frac{i}{\kappa} \sum_{J \geq 0} \sqrt{4\pi(2J+1)} (-i)^J \nabla [j_J(\kappa x) Y_{J0}] \right. \\ &\quad \left. \left. - l_0 \mathcal{J}_0(x) \sum_{J \geq 0} \sqrt{4\pi(2J+1)} (-i)^J j_J(\kappa x) Y_{J0} \right] \right\} | i \rangle. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Malo preraspodijelimo gornji izraz tako da imamo

$$\begin{aligned}
\langle f | \hat{H}_W | i \rangle = & -\frac{G}{\sqrt{2}} \langle f | \left\{ - \sum_{J \geq 1} (-i)^J \sqrt{2\pi(2J+1)} \sum_{\lambda=\pm 1} l_\lambda \left\{ \lambda \int d^3x \mathcal{J}(x) j_J(\kappa x) \mathcal{Y}_{JJ1}^{-\lambda} \right. \right. \\
& + \frac{1}{\kappa} \int d^3x \mathcal{J}(x) \nabla \times [j_J(\kappa x) \mathcal{Y}_{JJ1}^{-\lambda}] \left. \right\} \sum_{J \geq 0} (-i)^J \sqrt{4\pi(2J+1)} \left[ l_3 \int d^3x \mathcal{J}(x) \nabla [j_J(\kappa x) Y_{J0}] \right. \\
& \left. \left. - l_0 \int d^3x j_J(\kappa x) Y_{J0} \right] \right\} | i \rangle.
\end{aligned} \tag{4.31}$$

Sada ćemo definirati operatore

$$\hat{\mathcal{M}}_{JM}(\kappa) \equiv \hat{M}_{JM} + \hat{M}_{JM}^5 = \int d^3x [j_J(\kappa x) Y_{JM}] \mathcal{J}_0(x), \tag{4.32}$$

$$\hat{\mathcal{L}}_{JM}(\kappa) \equiv \hat{L}_{JM} + \hat{L}_{JM}^5 = \frac{i}{\kappa} \int d^3x \nabla [j_J(\kappa x) Y_{JM}] \cdot \mathcal{J}(x), \tag{4.33}$$

$$\hat{T}_{JM}^{el}(\kappa) \equiv \hat{T}_{JM}^{el} + \hat{T}_{JM}^{el5} = \frac{1}{\kappa} \int d^3x \nabla \times [j_J(\kappa x) \mathcal{Y}_{JJ1}^M] \cdot \mathcal{J}(x), \tag{4.34}$$

$$\hat{T}_{JM}^{mag}(\kappa) \equiv \hat{T}_{JM}^{mag} + \hat{T}_{JM}^{mag5} = \int d^3x [j_J(\kappa x) \mathcal{Y}_{JJ1}^M] \cdot \mathcal{J}(x). \tag{4.35}$$

Operatore smo razdvojili na vektorske i aksijalno vektorske komponente. Sada izraz (4.31) skraćeno možemo zapisati kao

$$\begin{aligned}
\langle f | \hat{H}_W | i \rangle = & -\frac{G}{\sqrt{2}} \langle f | \left\{ - \sum_{J \geq 1} (-i)^J \sqrt{2\pi(2J+1)} \sum_{\lambda=\pm 1} l_\lambda [\lambda \hat{\mathcal{T}}_{J-\lambda}^{mag}(\kappa) + \hat{\mathcal{T}}_{J-\lambda}^{el}(\kappa)] \right. \\
& \left. + \sum_{J \geq 0} (-i)^J \sqrt{4\pi(2J+1)} [l_3 \hat{\mathcal{L}}_{J0}(\kappa) - l_0 \hat{\mathcal{M}}_{J0}(\kappa)] \right\} | i \rangle.
\end{aligned} \tag{4.36}$$

Iskoristimo Wigner-Eckartov teorem [47]

$$\langle J_f M_f | \hat{O}_{JM} | J_i M_i \rangle = (-1)^{J_f - M_f} \begin{pmatrix} J_f & J & J_i \\ -M_f & M & M_i \end{pmatrix} \langle J_f || \hat{O}_J || J_i \rangle, \tag{4.37}$$

pa imamo

$$\begin{aligned}
\langle f | \hat{H}_W | i \rangle = & -\frac{G}{\sqrt{2}} \left\{ - \sum_{J \geq 1} (-i)^J \sqrt{2\pi(2J+1)} \sum_{\lambda=\pm 1} l_\lambda (-1)^{J_f - M_f} \times \right. \\
& \times \begin{pmatrix} J_f & J & J_i \\ -M_f & -\lambda & M_i \end{pmatrix} [\lambda \langle J_f || \hat{\mathcal{T}}_J^{mag}(\kappa) || J_i \rangle + \langle J_f || \hat{\mathcal{T}}_J^{el}(\kappa) || J_i \rangle] \\
& \left. + \sum_{J \geq 0} (-i)^J \sqrt{4\pi(2J+1)} (-1)^{J_f - M_f} \begin{pmatrix} J_f & J & J_i \\ -M_f & 0 & M_i \end{pmatrix} [l_3 \langle J_f || \hat{\mathcal{L}}_J(\kappa) || J_i \rangle - l_0 \langle J_f || \hat{\mathcal{M}}_J(\kappa) || J_i \rangle] \right\}.
\end{aligned} \tag{4.38}$$

Za izračun udarnih presjeka potreban nam je kvadrat amplitude usrednjen po konačnim, a sumiran po početnim projekcijama angularnog momenta. Pojediniosti računa se nalaze u Dodatku (A), a ovdje navodimo rezultat

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2J_i + 1} \sum_{M_i} \sum_{M_f} |\langle f | \hat{H}_W | i \rangle|^2 = \frac{G^2}{2} \frac{4\pi}{2J_i + 1} \times \\
& \times \left\{ \sum_{J \geq 1} \left[ \frac{1}{2} (\mathbf{l} \cdot \mathbf{l}^* - l_3 l_3^*) \left( |\langle J_f | \hat{\mathcal{T}}_J^{mag}(\kappa) | J_i \rangle|^2 + |\langle J_f | \hat{\mathcal{T}}_J^{el}(\kappa) | J_i \rangle|^2 \right) \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{i}{2} (\mathbf{l} \times \mathbf{l}^*)_3 \left( 2 \operatorname{Re} \langle J_f | \hat{\mathcal{T}}_J^{mag}(\kappa) | J_i \rangle \langle J_f | \hat{\mathcal{T}}_J^{el}(\kappa) | J_i \rangle^* \right) \right] \right. \\
& + \sum_{J \geq 0} \left[ l_3 l_3^* |\langle J_f | \hat{\mathcal{L}}_J(\kappa) | J_i \rangle|^2 + l_0 l_0^* |\langle J_f | \hat{\mathcal{M}}_J(\kappa) | J_i \rangle|^2 \right. \\
& \left. \left. - 2 \operatorname{Re} \left( l_3 l_0^* \langle J_f | \hat{\mathcal{L}}_J(\kappa) | J_i \rangle \langle J_f | \hat{\mathcal{M}}_J(\kappa) | J_i \rangle^* \right) \right] \right\}. \tag{4.39}
\end{aligned}$$

Gornji izraz je najopćenitiji oblik usrednjene amplitude za neki semileptonski proces opisan struja-struja interakcijom. U nastavku se ograničavamo na proces uhvata elektrona. U izrazu (4.39) još preostaje odrediti reducirane matrične elemente operatora koji se pojavljuju. Taj dio nije trivijalan i zahtjeva određene aproksimacije, koje su egzaktno u nerelativističkom limesu. Raspis operatora je dan u Dodatku (A), a njihovi reducirani matrični elementi se mogu pronaći u [42] ili [45]. Diferencijalni udarni presjek određujemo iz Fermijevog zlatnog pravila

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{(2\pi)^2} \Omega^2 E_\nu^2 \frac{1}{2} \sum_{lept.spin.} \frac{1}{2J_i + 1} \sum_{M_i, M_f} |\langle f | \hat{H}_W | i \rangle|^2. \tag{4.40}$$

Leptonski tragovi se određuju iz izraza  $\frac{\Omega^2}{2} \sum_{lept.spin.}$  i izračunati su u Dodatku (A). Kombinirajući sve rezultate, te izraze (4.39) i (4.40) izraz za diferencijalni udarni presjek glasi [48]

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{d\Omega} = & \frac{G^2 \cos^2 \theta_c}{2\pi} \frac{F(Z, E_e)}{2J_i + 1} \left\{ \sum_{J \geq 1} \mathcal{W}(E_e, E_\nu) \left\{ [1 - (\hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{q}})(\boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{q}})] [|\langle J_f | \hat{\mathcal{T}}_J^{mag}(\kappa) | J_i \rangle|^2 + |\langle J_f | \hat{\mathcal{T}}_J^{el}(\kappa) | J_i \rangle|^2] \right. \right. \\
& - 2\hat{\mathbf{q}} \cdot (\hat{\mathbf{v}} - \boldsymbol{\beta}) \operatorname{Re} |\langle J_f | \hat{\mathcal{T}}_J^{mag}(\kappa) | J_i \rangle \langle J_f | \hat{\mathcal{T}}_J^{el}(\kappa) | J_i \rangle^* \} \\
& + \sum_{J \geq 0} \mathcal{W}(E_e, E_\nu) \left\{ [1 - \hat{\mathbf{v}} \cdot \boldsymbol{\beta} + 2(\hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{q}})(\boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{q}})] |\langle J_f | \hat{\mathcal{L}}_J(\kappa) | J_i \rangle|^2 + (1 + \hat{\mathbf{v}} \cdot \boldsymbol{\beta}) |\langle J_f | \hat{\mathcal{M}}_J(\kappa) | J_i \rangle|^2 \right. \\
& \left. \left. - 2\hat{\mathbf{q}} \cdot (\hat{\mathbf{v}} + \boldsymbol{\beta}) \operatorname{Re} \langle J_f | \hat{\mathcal{L}}_J(\kappa) | J_i \rangle \langle J_f | \hat{\mathcal{M}}_J(\kappa) | J_i \rangle^* \right\} \right\}. \tag{4.41}
\end{aligned}$$

Sa  $\mathbf{q} = \mathbf{v} - \mathbf{k}$  smo označili razliku između impulsa neutrina i elektrona, a  $\hat{\mathbf{v}}$  i  $\hat{\mathbf{q}}$  su odgovarajući jedinični vektori. Nadalje  $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{k}/E_e$ . Energija nadolazećeg elektrona je  $E_e$ , a izlaznog neutrina  $E_\nu$ . Fermijeva funkcija  $F(Z, E_e)$  uzima u obzir distorziju elektronskih

valnih funkcija zbog kulonskog potencijala jezgre, a definirana je u [49]. Član

$$\mathcal{W}(E_e, E_\nu) = \frac{E_\nu^2}{1 + E_e/M_T(1 - \hat{\nu} \cdot \boldsymbol{\beta})}, \quad (4.42)$$

uzima u obzir odboj jezgre, a  $M_T$  je masa jezgre mete. Fizikalno važna veličina za mehanizam dinamike supernova je stopa uhvata elektrona<sup>1</sup> koja je definirana kao [16, 50]

$$\lambda_{ec} = \frac{1}{\pi^2 \hbar^3} \int_{E_e^0}^{\infty} p_e E_e \sigma_{ec}(E_e) f(E_e, \mu_e, T) dE_e. \quad (4.43)$$

$E_e^0 = \max(|Q_{if}|, m_e c^2)$  je minimalna energija elektrona potrebna za proces uhvata, gdje je  $Q$ -vrijednost reakcije  $Q_{if} = -\epsilon - \Delta_{np}$ .  $\epsilon$  je energija pobuđenja jezgre, u odnosu na jezgru majku, umanjena za razliku masa neutrona i protona  $\Delta_{np}$ . Impuls elektrona je  $p_e = \sqrt{E_e^2 - m_e^2 c^4}$ , raspodjela elektrona je opisana Fermi-Diracovom distribucijom

$$f(E_e, \mu_e, T) = \frac{1}{\exp\left(\frac{E_e - \mu_e}{kT}\right) + 1}, \quad (4.44)$$

gdje je  $\mu_e$  kemijski potencijal elektrona, a  $T$  temperatura. Kemijski potencijal određujemo invertiranjem relacije [16]

$$\rho Y_e = \frac{1}{\pi^2 N_A} \left(\frac{m_e c}{\hbar}\right)^3 \int_0^{\infty} (f_e - f_e^+) p^2 dp, \quad (4.45)$$

gdje je  $\rho$  gustoća bariona,  $Y_e$  omjer broja elektrona i bariona,  $N_A$  je Avogadrova konstanta, a  $f_e^+$  označava Fermi-Diracovu raspodjelu pozitrona za koje vrijedi  $\mu_e^+ = -\mu_e$ . Ukoliko u obzir uključimo efekte zasjenjenja elektrona<sup>2</sup>, relacija za stope uhvata (4.43) se mijenja kao

$$\lambda_{ec} = \frac{1}{\pi^2 \hbar^3} \int_{E_e^{s0}}^{\infty} p_e E_e \sigma_{ec}(E_e) f(E_e, \mu_e - V_s, T) dE_e, \quad (4.46)$$

gdje je sada  $E_e^{s0} = \max(|Q_{if}^s|, m_e c^2)$ , te vrijedi  $Q_{if}^s = Q_{if} + \Delta Q_C$ , a  $V_s$  je potencijal zasjenjenja. Vrijedi  $\Delta Q_C = \mu_C(Z-1) - \mu_C(Z)$ , pri čemu je  $\mu_C(Z)$  kemijski potencijal za jezgru broja protona  $Z$  koji dolazi od efekata zasjenjenja [50–52].

---

<sup>1</sup>electron capture rate (eng.)

<sup>2</sup>screening (eng.)

## 5 Numerička implementacija

Blok dijagram za programski kod se nalazi na slici (5.1). Možemo ga podijeliti u tri glavna dijela. Prvi je kod za osnovno stanje jezgre na konačnoj temperaturi temeljen na FT-HBCS teoriji. Kada odaberemo jezgru za koju želimo raditi proračune uhvata elektrona prvo je potrebno odrediti konstante sparivanja  $G_n, G_p$  za protone i neutrone koje se pojavljuju u BCS jednadžbi (2.68). Njih određujemo iz tzv. *3-point* (eng.) formule koja je dana s (2.70). Nakon prilagodbe na eksperimentalne parametre vezanja kreće izračun jednočestičnih energija i faktora zauzeća, iz kojih se može odrediti parametar rascjepa  $\Delta$ , energija sparivanja  $E_{pair}$  i mnogi drugi koji su nam važni kod razmatranja uhvata elektrona u ovom radu. Na kraju se računa energija vezanja jezgre te se provjerava uvjet konvergencije rješenja (sustav jednadžbi rješavamo samosuglasno kako je već diskutirano). Ukoliko uvjet konvergencije nije zadovoljen idemo u sljedeću iteraciju sve dok ne zadovoljimo uvjet. Maksimalni broj iteracija koje smo postavili je 200, no obično bi rješenja iskonvergirala nakon 30-ak iteracija. Za maksimalne brojeve oscilatorskih ljusaka smo izabrali  $N_F = N_B = 20$ . Kod za osnovno stanje nam kao rezultat izvođenja daje ispis valnih funkcija u pojedinim točkama koordinatne mreže, kao i ispise gustoća pojedinih mezona koje se pojavljuju u računima. Mreža ukupno ima 401 točku, a gornja granica joj je  $r_{max} = 20$  fm, dok je razmak  $r_{step} = 0.05$  fm. Ta datoteka predstavlja ulaz za FT-PNRQRPA kod za izračun pobuđenog stanja. Kod je razvijen u programskom jeziku FORTRAN 77.

FT-PNRQRPA kod prvo čita ulazne podatke iz izlazne datoteke koda za osnovno stanje. Oblik interakcije koji koristimo je DD-ME2, a svi njegovi parametri se mogu naći u tablici (2.1). Za izračun svih radijalnih integrala kreiramo mrežu po uzoru na onu koda za osnovno stanje koja će se koristiti tijekom Gauss-Laguerre ili Gauss-Legendre integracije. To su dvije numeričke metode integracije koje smo implementirali u kodu. Osnovna ideja je prikazati integral kao sumu produkta težinskih faktora  $w_i$  i podintegralne funkcije izvrijednjene u čvorovima  $x_i$

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n w_i f(x_i), \quad (5.1)$$

gdje je dakako potrebno skalirati domenu integracije na interval  $[-1, 1]$ . Više detalja o ovoj metodi integracije se može pronaći u [53]. U sljedećem koraku potrebno je formirati  $ph$  i  $ah$  parove. Oni su definirani maksimalnom energijom parova, kao i izbornim pravilima angularnog momenta. Za  $ph$  parove, svugdje smo koristili  $E_{max} = 100$  MeV, što



znači da ukoliko je energija para veća od te energije, on nije ulazio u obzir pri konstrukciji RPA matrice. Antičestična stanja smo samo uzimali u obzir kod potvrde konzistentnosti teorije Ikeda pravilom sume (3.74), a za minimalnu energiju  $\alpha h$  para smo odabrali  $E_{min} = -2000$  MeV, po uzoru na [40]. Da li se radi o čestici (antičestici) ili šupljini, definirano je parametrom praga za kvazičestična stanja. Ukoliko je  $v_i^2 > 0.01^1$  imat ćemo šupljinu, inače se radi o čestici. Uključivanjem antičestičnih stanja konfiguracijski prostor se znatno povećava kao i vrijeme izvođenja koda. Kvazičestične parove ispisujemo u posebnu datoteku kako bismo ih kasnije mogli posebno analizirati.

Jednom kada imamo konfiguracijski prostor parova, možemo izgraditi QRPA matricu (3.44). Potrebno je izračunati sve matrične elemente, koji su raspisani u Dodatku (B), kao i provesti radijalnu integraciju na prije definiranoj mreži. Tu nam se pojavljuje slobodni parametar rezidualne interakcije sparivanja  $V_0$  iz jednadžbe (3.67), za kojeg smo (osim ako to nije eksplicitno naglašeno) odabrali  $V_0 = 200$  MeV. Nakon konstrukcije QRPA matrica, provodimo dijagonalizaciju, koja nam daje energije pobuđenja  $E_\nu$  kao i odgovarajuće svojstvene vektore, koji su izgrađeni od amplituda  $X_{ab}^\nu, Y_{ab}^\nu, P_{ab}^\nu, Q_{ab}^\nu$ . Rješenja zatim sortiramo po energijama i provjeravamo da li zadovoljavaju uvjet normalizacije (3.55).

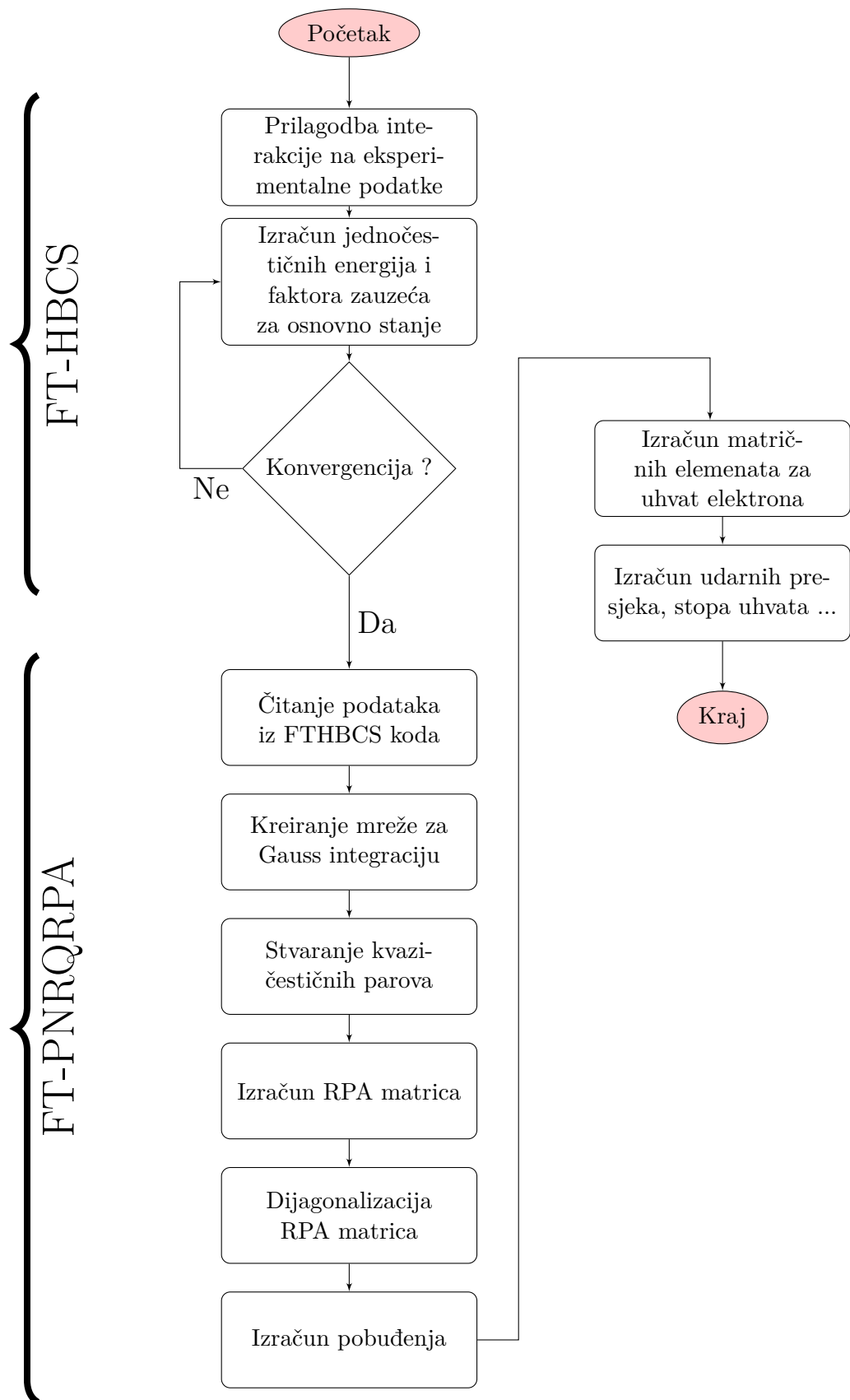
U daljnjem koraku računamo pobuđenja, točnije IAR i GTR spektar prijelazne snage. Budući da je dinamika uhvata elektrona usko vezana uz ponašanje GTR spektra prijelazne snage, njega posebno proučavamo i rezultate izlažemo u sljedećem poglavlju.

U zadnjem koraku računamo matrične elemente koji su potrebni za određivanje udarnih presjeka kao i stopa uhvata što uključuje i prijelaze viših multipola. Koriste se slične metode integracije opisane u prethodnim odlomcima, a radi se o zasebnim modulima koji čine treći dio programskog koda.

FT-PNRQRPA kod i kod za izračun veličina važnih za uhvat elektrona su razvijeni u C++ programskom jeziku. FT-RRPA kod koji ne uključuje interakcije sparivanja već samo efekte konačne temperature je napravljen po uzoru na [16].

---

<sup>1</sup>BCS faktor  $v_i^2$ , za definiciju pogledati poglavlje (2).



Slika 5.1: Blok dijagram za FT-HBCS+FT-PNRQRPA programski kod koji koristimo u ovom radu.

## 6 Rezultati

### 6.1 Analiza uhvata elektrona na jezgrama $^{54}\text{Fe}$ i $^{56}\text{Fe}$

U ovom poglavlju izlažemo analizu rezultata dobivenih FT-HBCS+FT-RQRPA formalizmom za jezgre  $^{54}\text{Fe}$  i  $^{56}\text{Fe}$  koristeći DD-ME2 interakciju [23]. Kao što je već opisano, korelacije sparivanja u osnovnom stanju jezgre tretirane su na nivou BCS modela u sklopu FT-HBCS teorije. Za određivanje konstanti sparivanja koristili smo tzv. *3-point* (eng.) relaciju (2.70). Parametri prilagodbe na eksperimentalne podatke za parametar rascjepa  $\Delta$  navedeni su u tablici (6.1).

Tablica 6.1: Parametri prilagodbe na eksperimentalne podatke za jezgre  $^{54}\text{Fe}$  i  $^{56}\text{Fe}$ .  $\Delta_{n,p}$  su parametri rascjepa za protone i neutrone, a  $G_{n,p}$  konstante sparivanja kao u relaciji (2.68). Eksperimentalni podaci su dobavljeni iz [54].

	$\Delta_n^{exp}$ [MeV]	$\Delta_p^{exp}$ [MeV]	$G_n$	$G_p$
$^{54}\text{Fe}$	-	1.5027	-	27.6266
$^{56}\text{Fe}$	1.7755	1.6147	28.4483	30.0018

Budući da jezgra  $^{54}\text{Fe}$  ima magični broj neutrona  $N = 28$ , za neutrone nema korelacija sparivanja, što je i prikazano u gornjoj tablici. Za rezidualnu interakciju sparivanja u  $T = 0$  kanalu za pobuđena stanja smo koristili  $V_0 = 200$  MeV u svim računima, osim gdje je eksplicitno naglašeno drugačije. Najvažnija veličina kod FT-HBCS teorije vezana uz korelacije sparivanja je parametar rascjepa  $\Delta$ . Njegovu ovisnost o temperaturi možemo vidjeti na slici (6.1)(gore). Vidimo da kod  $^{54}\text{Fe}$ , prilagodbom na eksperimentalne podatke dobivamo da  $\Delta$  za protone iščezava na  $T_c \sim 0.8$  MeV, dok u potpunosti iščezava na svim temperaturama za neutrone, budući da se radi o jezgri s magičnim brojem neutrona. Ponašanje parametra rascjepa  $\Delta$  s temperaturom za jezgru  $^{56}\text{Fe}$  je također prikazano na slici (6.1)(gore). Kod protona za temperaturu kolapsa korelacija sparivanja dobivamo  $T_c \sim 0.8$  MeV, dok za neutrone  $T_c \sim 0.9$  MeV. Na slici (6.1)(sredina) vidimo ovisnost kemijskog potencijala  $\lambda$  o temperaturi. Na slici (6.1)(dolje) prikazana je ovisnost energije sparivanja  $E_{pair}$  u ovisnosti o temperaturi. Vidimo da ona zapravo prati ponašanje parametra rascjepa  $\Delta$ , te za temperature faznog prijelaza ide u nulu. Energija sparivanja nam je važna veličina koja direktno ulazi u energijski funkcional (2.21).

#### 6.1.1 Gamow-Teller spektar prijelazne snage

Najznačajniji doprinos kod uhvata elektrona u jezgrama čine Gamow-Teller prijelazi za koje je  $J^\pi = 1^+$ , tako da se treba detaljno posvetiti analizi spektra Gamow-Teller prijelazne snage koji je prikazan na slici (6.2) za  $^{54}\text{Fe}$  i  $^{56}\text{Fe}$ . Prikazana je ovisnost

jakosti  $GT^+$  raspodjele prijelazne snage  $B(GT^+)$  o energiji pobuđenja, za temperature  $T = 0, 0.3, 0.6, 1.0$  i  $2.0$  MeV. Dakle, obuhvatili smo raspon temperatura ispod i iznad faznog prijelaza. Matrični element  $B(GT^+)$  je u FT-RQRPA teoriji izračunat iz (3.72). Jasno uočavamo glavni vrh koji odgovara prijelazu  $\pi 1f_{5/2} \rightarrow \nu 1f_{7/2}$ , koji ujedno ima i najveći doprinos u  $B(GT^+)$ . U tablici (6.3) su prikazani doprinosi pojedinih kvazičestičnih prijelaza za  $^{54}\text{Fe}$ , te njihova relativna snaga, koja je izračunata kao udio u normi tog stanja pri odgovarajućoj energiji pobuđenja na temperaturi  $T = 0.6$  MeV, kao i stvarni doprinos matričnom elementu  $B(GT^+)$ . Norma stanja je [38]

$$A_{ab} = |\tilde{X}_{ab}^\nu|^2 - |\tilde{Y}_{ab}^\nu|^2 + |\tilde{P}_{ab}^\nu|^2 - |\tilde{Q}_{ab}^\nu|^2, \quad (6.1)$$

a uvjet normalizacije za FT-RQRPA je dan s

$$\sum_{a \geq b} A_{ab} = 1 \quad (6.2)$$

U tablici (6.3) je prikazano pet najzastupljenijih vrhova u  $GT^+$  spektru prema ukupnoj snazi za  $^{54}\text{Fe}$ . Iz doprinosa kvazičestičnih parova za  $^{54}\text{Fe}$  vidimo da su oni dominantno jednočestični i da nemamo značajne doprinose kolektivnosti. Kod najdominantnijeg prijelaza  $\pi 1f_{5/2} \rightarrow \nu 1f_{7/2}$  imamo  $(\pi j = l - \frac{1}{2} \rightarrow \nu j = l + \frac{1}{2})$ , tzv. inverzni direktni *spin-flip* prijelaz. Kod  $^{54}\text{Fe}$  najdominantniji prijelaz na  $E_{RPA} = 3.33$  MeV je  $\pi 2p_{3/2} \rightarrow \nu 2p_{3/2}$  koji je oblika  $(\pi j = l \pm \frac{1}{2} \rightarrow \nu j = l \pm \frac{1}{2})$ . Treći tip prijelaza,  $(\pi j = l + \frac{1}{2} \rightarrow \nu j = l - \frac{1}{2})$  je direktni *spin-flip* prijelaz i uočavamo ga kod  $^{54}\text{Fe}$   $GT^+$  spektra, kao jedan od doprinosa u vrhu  $E_{RPA} = 3.33$  MeV ( $\pi 2p_{3/2} \rightarrow \nu 2p_{1/2}$ ), no njegov doprinos normi stanja je ipak malen ( $< 6\%$ ). Iznos  $B(GT^+)$  prijelazne snage pet najvećih vrhova je dan u tablici (6.3) pri odgovarajućim energijama pobuđenja.

U tablici (6.4) prikazani su dominantni kvazičestični prijelazi za  $^{56}\text{Fe}$ , dok je njihova snaga  $B(GT^+)$  za pet najdominantnijih vrhova dana u tablici (6.5). Ovoga puta smo analizirali temperaturu  $T = 0.3$  MeV koja se nalazi ispod temperature faznog prijelaza za  $^{56}\text{Fe}$ . Kod stanja na energiji  $E_{RPA} = 5.99$  MeV vidimo izraženu kolektivnost.

Promotrimo sliku (6.2) za spektar  $GT^+$  prijelazne snage. I FT-RQRPA teorija i FT-RRPA teorija<sup>1</sup> predviđaju jedan vrh koji odgovara prijelazu  $\pi 1f_{5/2} \rightarrow \nu 1f_{7/2}$  koji jasno

---

<sup>1</sup>FT-RRPA teorija ne sadrži interakciju sparivanja, stoga nakon temperature faznog prijelaza trebamo imati podudaranje između FT-RQRPA i FT-RRPA teorija.

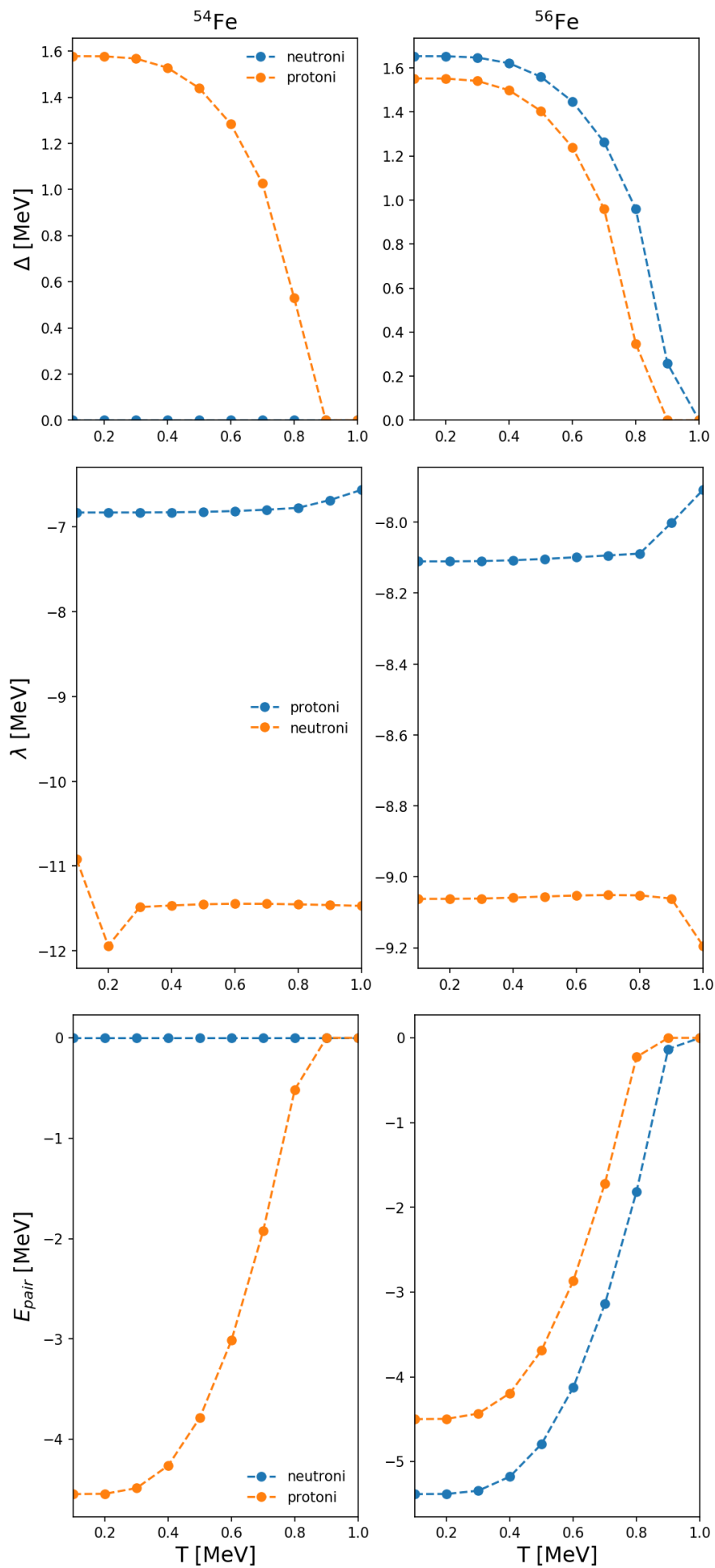
dominira u spektru. Uočavamo da za temperature iznad kojih dolazi do faznog prijelaza (recimo za  $T = 1.0$  MeV za obje jezgre) FT-RQRPA i FT-RRPA teorije predviđaju iste spektre te se vrhovi odlično podudaraju. Ovo čini dodatnu provjeru konzistentnosti našeg modela. Iznad temperatura faznog prijelaza korelacije sparivanja više ne igraju ulogu te do izražaja dolaze isključivo efekti konačne temperature što se može vidjeti u postojanju dodatnih vrhova na temperaturi  $T = 2.0$  MeV.

Snaga rezidualne interakcije sparivanja je u našoj teoriji slobodan parametar te smo vođeni radom [55] odabrali  $V_0 = 200$  MeV. No zanimljivo je promotriti što se dogodi sa GT spektrom kada isključimo rezidualnu interakciju sparivanja. Takav  $GT^+$  spektar je prikazan na slici (6.3). Za jezgru  $^{56}\text{Fe}$  dolazi do značajne fragmentacije stanja na energiji oko  $E_{RPA} \sim 8$  MeV, koja je u skladu sa izračunima koje predviđa RHB+RQRPA [40]. Kod  $^{54}\text{Fe}$  ne uočavamo istu fragmentaciju budući da na neutronska stanja korelacije sparivanja nemaju efekt. Slična predviđanja fundamentalnijih RHB proračuna i našeg FT-HBCS+FT-RQRPA proračuna za fragmentaciju stanja čini dodatnu provjeru konzistentnosti modela.

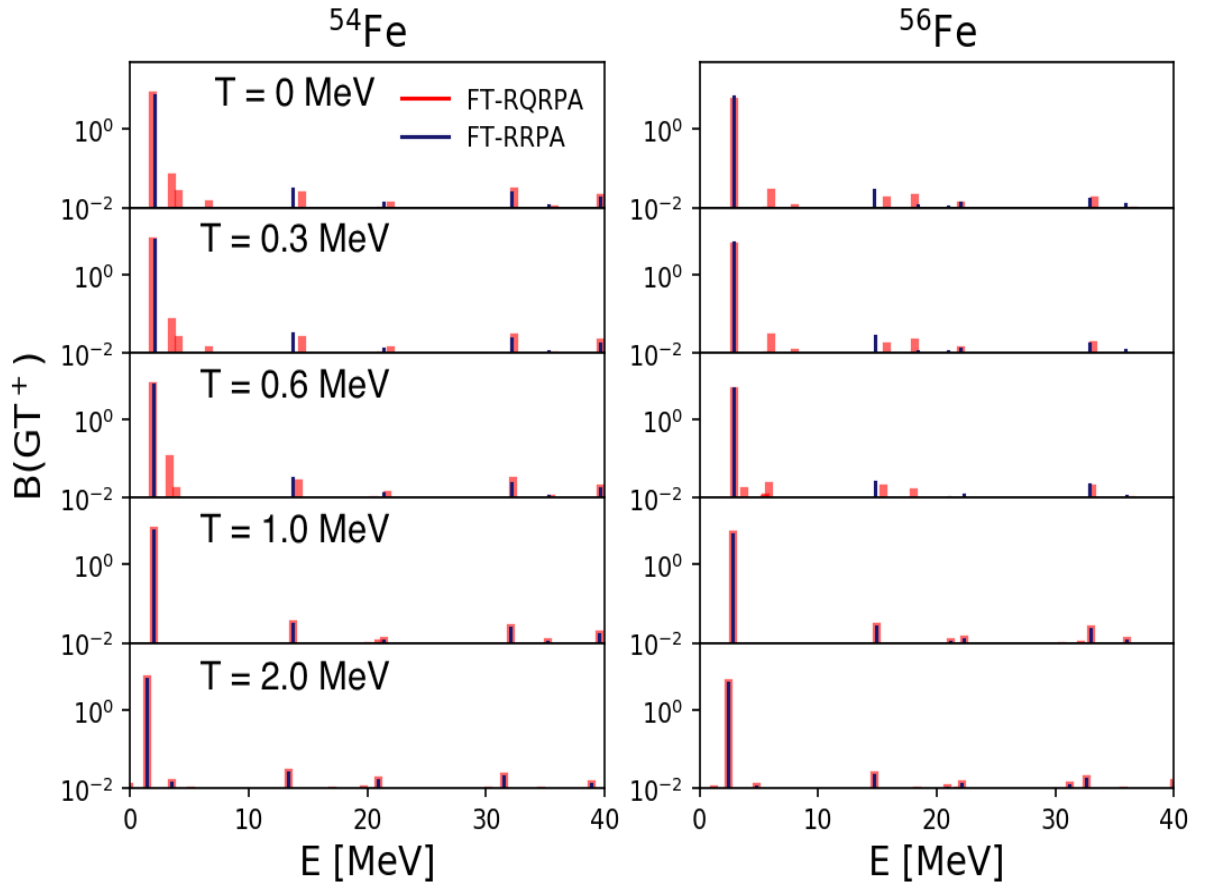
Konzistentnost izračuna za  $GT^+$  raspodjelu prijelazne snage provjeravamo Ikeda pravilom sume [40]

$$S(GT^-) - S(GT^+) = 3(N - Z), \quad (6.3)$$

gdje  $S(GT^\pm)$  predstavljaju kumulativnu sumu po GT raspodjelama,  $N$  je broj neutrona za razmatranu jezgru, a  $Z$  je broj protona. Svi prikazani proračuni se podudaraju s Ikeda pravilom sume do na  $\sim 90\%$  što je zadovoljavajuća vrijednost, i prikazana je na slici (6.4). Potpuno slaganje dobili bismo uključivanjem antičestičnih prijelaza u račun [40].



Slika 6.1: (gore) Ovisnost energije rascjepa  $\Delta$  o temperaturi. (sredina) Ovisnost kemijskog potencijala  $\lambda$  protona i neutrona o temperaturi. (dolje) Ovisnost energije sparivanja  $E_{pair}$  o temperaturi. Posebno su razmatrana protonska i neutronska stanja za jezgre  $^{54}\text{Fe}$  i  $^{56}\text{Fe}$ .



Slika 6.2: Gamow-Teller raspodjela prijelazne snage  $B(GT^+)$  za jezgre  $^{54}\text{Fe}$  i  $^{56}\text{Fe}$  pri temperaturama  $T = 0, 0.3, 0.6, 1.0$  i  $2.0$  MeV, sa jakosti rezidualne interakcije sparivanja,  $V_0 = 200$  MeV u  $T = 0$  kanalu.

Tablica 6.2: Tablica prikazuje doprinos najznačajnijih kvazičestičnih parova prema doprinosu u  $GT^+$  spektru za jezgru  $^{54}\text{Fe}$  pri temperaturi  $T = 0.6$  MeV, uz  $V_0 = 200$  MeV.

T = 0.6 MeV, $V_0 = 200$ MeV, FT-RQRPA			
E [MeV]	Prijelaz	Rel. snaga (norma) (%)	Snaga
1.91	$(\pi 1 f_{5/2}, \nu 1 f_{7/2})$	94.39	3.08
	$(\pi 2 p_{3/2}, \nu 2 p_{3/2})$	1.46	0.02
	$(\pi 1 f_{7/2}, \nu 1 f_{7/2})$	1.10	-0.16
	$(\pi 2 p_{3/2}, \nu 2 p_{1/2})$	0.76	0.02
	$(\pi 1 f_{5/2}, \nu 1 f_{7/2})$	0.53	-0.26
3.33	$(\pi 2 p_{3/2}, \nu 2 p_{3/2})$	55.39	0.14
	$(\pi 2 p_{1/2}, \nu 2 p_{3/2})$	6.78	0.04
	$(\pi 1 f_{5/2}, \nu 1 f_{5/2})$	6.77	0.03
	$(\pi 2 p_{3/2}, \nu 2 p_{1/2})$	5.88	0.04
	$(\pi 1 f_{5/2}, \nu 1 f_{7/2})$	2.71	-0.52
32.22	$(\pi 1 f_{7/2}, \nu 1 f_{7/2})$	0.46	-0.07
	$(\pi 2 g_{7/2}, \nu 1 d_{5/2})$	27.16	-0.03
	$(\pi 4 d_{5/2}, \nu 1 d_{3/2})$	21.60	-0.01
	$(\pi 1 p_{3/2}, \nu 2 p_{1/2})$	12.79	-0.06
	$(\pi 1 p_{3/2}, \nu 1 f_{5/2})$	7.84	-0.02
	$(\pi 4 f_{7/2}, \nu 1 f_{7/2})$	4.85	-0.01
	$(\pi 5 s_{1/2}, \nu 2 s_{1/2})$	4.39	-0.01
	$(\pi 1 p_{3/2}, \nu 2 p_{3/2})$	3.07	-0.02
	$(\pi 3 d_{3/2}, \nu 1 d_{5/2})$	1.09	-0.01
	$(\pi 2 f_{5/2}, \nu 1 f_{7/2})$	97.65	-0.16
14.14	$(\pi 4 d_{3/2}, \nu 1 d_{5/2})$	73.63	-0.10
39.61	$(\pi 4 d_{5/2}, \nu 1 d_{5/2})$	13.49	-0.02

Tablica 6.3:  $GT^+$  prijelazna snaga za različite energije pobuđenja jezgre  $^{54}\text{Fe}$  pri temperaturi  $T = 0.6$  MeV, uz  $V_0 = 200$  MeV.

E [MeV]	B( $GT^+$ )
1.91	7.27
3.33	0.10
32.22	0.03
14.14	0.02
39.61	0.02

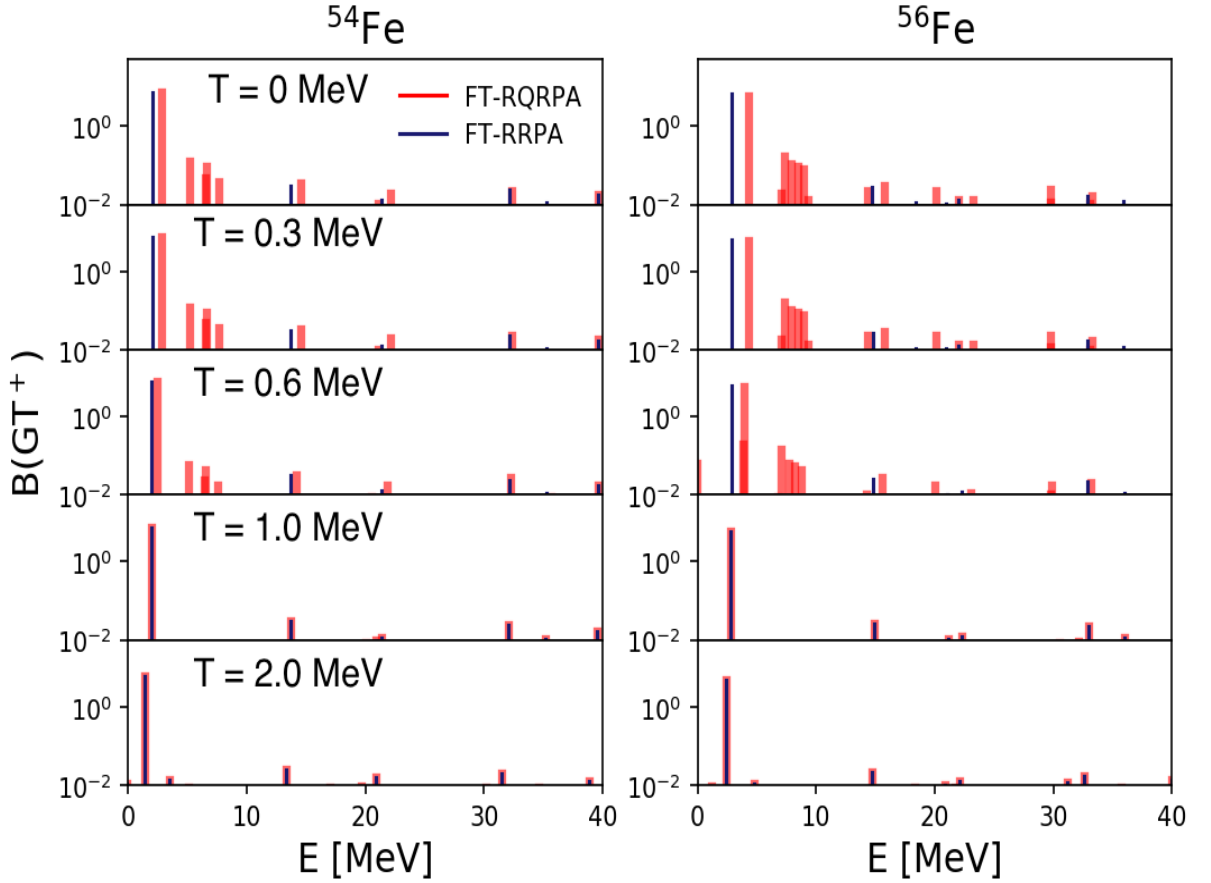


Tablica 6.4: Doprinosi najznačajnijih kvazičestičnih parova prema doprinosu u  $GT^+$  spektru za jezgru  $^{56}\text{Fe}$  pri temperaturi  $T = 0.3$  MeV, uz  $V_0 = 200$  MeV.

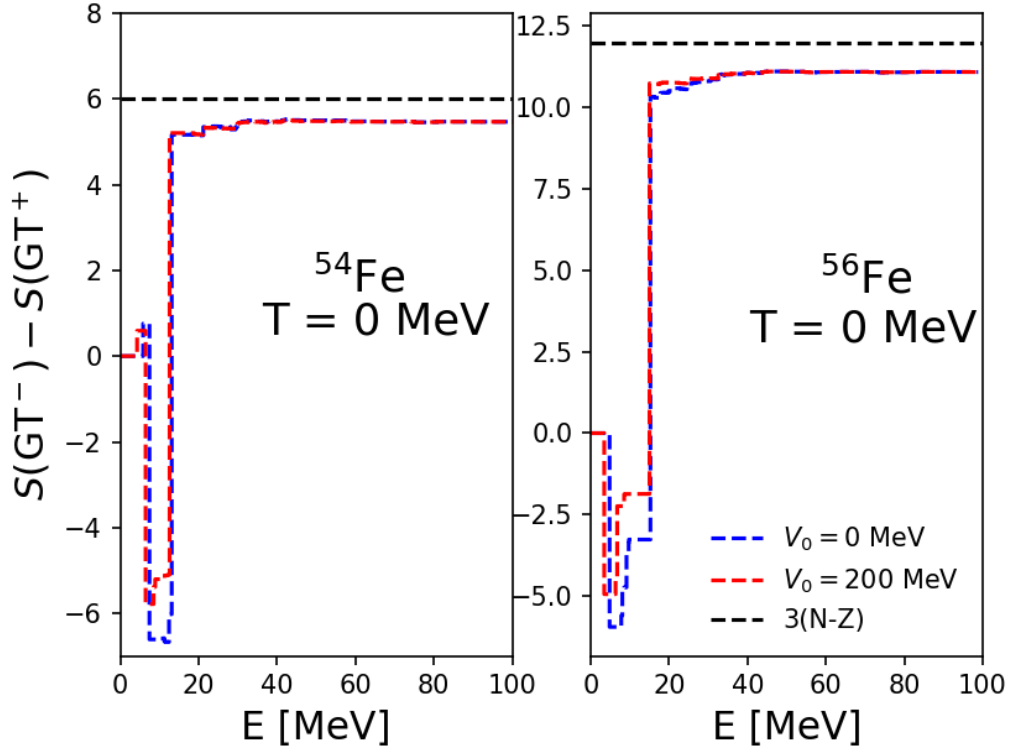
T = 0.3 MeV, $V_0 = 200$ MeV, FT-RQRPA			
E [MeV]	Prijelaz	Rel. snaga (norma) (%)	Snaga
2.86	$(\pi 1 f_{5/2}, \nu 1 f_{7/2})$	97.41	2.82
	$(\pi 2 p_{3/2}, \nu 2 p_{1/2})$	0.61	-0.01
	$(\pi 1 f_{5/2}, \nu 1 f_{7/2})$	0.45	-0.24
	$(\pi 2 p_{3/2}, \nu 2 p_{3/2})$	0.41	-0.07
	$(\pi 1 f_{5/2}, \nu 1 f_{5/2})$	0.24	-0.02
	$(\pi 1 f_{7/2}, \nu 1 f_{7/2})$	0.17	-0.15
	$(\pi 2 p_{1/2}, \nu 2 p_{3/2})$	0.03	-0.06
5.99	$(\pi 2 p_{3/2}, \nu 2 p_{3/2})$	35.28	0.12
	$(\pi 1 f_{7/2}, \nu 1 f_{7/2})$	24.56	0.13
	$(\pi 2 p_{3/2}, \nu 2 p_{1/2})$	17.83	0.10
	$(\pi 2 p_{1/2}, \nu 2 p_{3/2})$	5.29	0.02
	$(\pi 1 f_{5/2}, \nu 1 f_{7/2})$	1.25	-0.49
	$(\pi 1 f_{5/2}, \nu 1 f_{7/2})$	0.88	-0.02
	$(\pi 1 f_{5/2}, \nu 1 f_{5/2})$	0.10	-0.02
18.08	$(\pi 1 g_{9/2}, \nu 1 g_{9/2})$	83.18	-0.02
	$(\pi 1 f_{5/2}, \nu 1 f_{5/2})$	0.60	0.01
	$(\pi 1 f_{7/2}, \nu 1 f_{7/2})$	0.07	0.04
	$(\pi 1 f_{5/2}, \nu 1 f_{7/2})$	0.05	0.07
40.38	$(\pi 4 d_{3/2}, \nu 1 d_{5/2})$	78.22	0.10
	$(\pi 4 d_{5/2}, \nu 1 d_{5/2})$	11.02	0.02
33.20	$(\pi 4 f_{7/2}, \nu 1 f_{7/2})$	63.36	-0.06
	$(\pi 2 g_{7/2}, \nu 1 d_{5/2})$	6.57	-0.01
	$(\pi 5 s_{1/2}, \nu 2 s_{1/2})$	3.73	-0.01
	$(\pi 1 p_{3/2}, \nu 2 p_{1/2})$	2.40	-0.02

Tablica 6.5:  $GT^+$  prijelazna snaga za različite energije pobuđenja jezgre  $^{56}\text{Fe}$  pri temperaturi  $T = 0.3$  MeV, uz  $V_0 = 200$  MeV.

E [MeV]	B( $GT^+$ )
2.86	5.09
5.99	0.02
18.08	0.02
40.38	0.02
33.20	0.02



Slika 6.3: Gamow-Teller raspodjela prijelazne snage  $B(GT^+)$  za jezgre  $^{54}\text{Fe}$  i  $^{56}\text{Fe}$  pri temperaturama  $T = 0, 0.3, 0.6, 1.0$  i  $2.0$  MeV, bez rezidualne interakcije sparivanja u  $T = 0$  kanalu ( $V_0 = 0$  MeV). Posebno su zanimljivi skupovi vrhova u spektru  $^{56}\text{Fe}$  na energiji oko  $E_{QRPA} = 8$  MeV. Tim stanjima, isključivanjem rezidualne interakcije sparivanja doprinose  $(\pi 1f_{7/2} \rightarrow \nu 1f_{7/2})$  na  $E_{QRPA} = 7.02$  MeV, te  $(\pi 2p_{3/2} \rightarrow \pi 2p_{1/2})$  na  $E_{QRPA} = 7.72$  MeV. Uočimo da je kod  $^{54}\text{Fe}$  fragmentacija manje izražena.

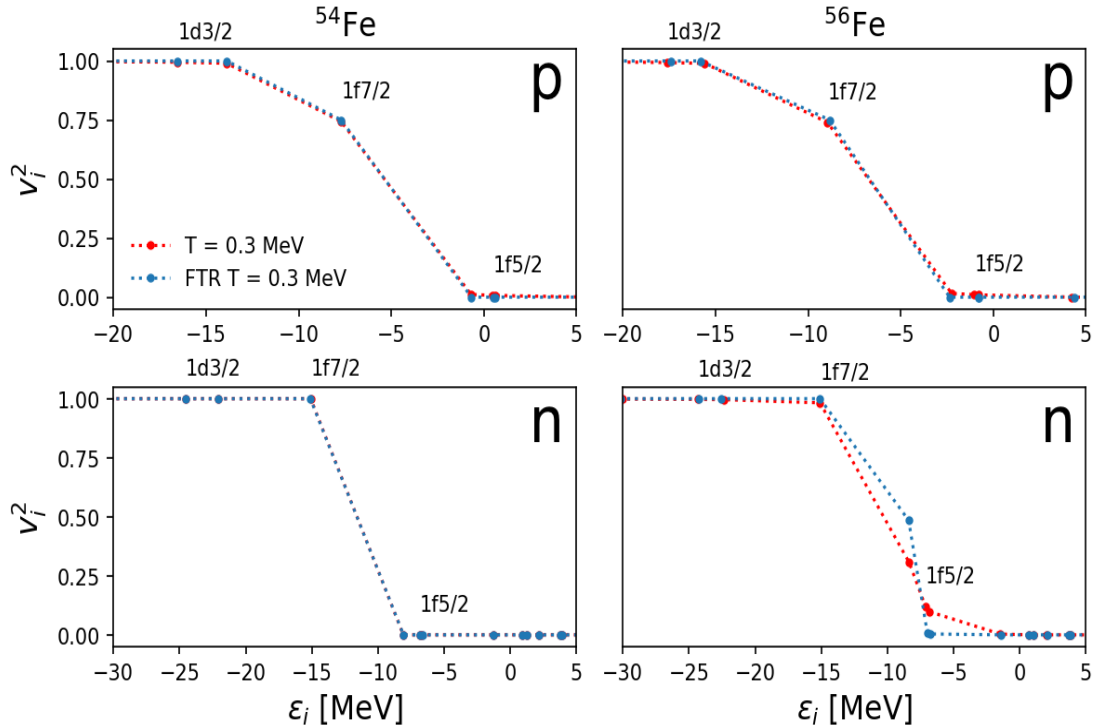


Slika 6.4: Razlika  $S(GT^-) - S(GT^+)$  kumulativnih suma po GT spektrima prijelazne snage za  $^{54}\text{Fe}$  i  $^{56}\text{Fe}$  pri temperaturi  $T = 0$  MeV, uz isključenu ( $V_0 = 0$  MeV) i uključenu ( $V_0 = 200$  MeV) rezidualnu interakciju sparivanja. Vrijednost  $3(N-Z)$  je ona koju zadovoljava Ikeda pravilo sume. U oba slučaja Ikeda pravilo je zadovoljeno do na  $\sim 90\%$ .

### 6.1.2 Udarni presjeci uhvata elektrona

Udarni presjeci za uхват elektrona na izotopima željeza bi trebali biti dominirani multipolom  $J^\pi = 1^+$  koji odgovara Gamow-Teller prijelazima. Dosadašnji izračuni koji nisu uključivali korelacije sparivanja, upravo i potvrđuju ono što smo već mogli anticipirati iz  $GT^+$  spektra prijelazne snage, koji je dominiran jednim  $1^+$  prijelazom kao na slikama (6.3) i (6.4) [16, 48]. Izračuni udarnog presjeka za multipole  $J^\pi = 0^\pm, 1^\pm, 2^\pm$  se nalaze na slici (6.7) na temperaturi  $T = 1.0$  MeV, te na slici (6.8) za temperaturu  $T = 0.6$  MeV. Na desnoj strani slika (6.7) i (6.8) su prikazani FT-RRPA izračuni koji ne uključuju interakciju sparivanja.  $J^\pi = 1^+$  prijelaz ima značajno najveći doprinos kako smo i predvidjeli. Izračun za FT-RQRPA je prikazan na slikama (6.7) i (6.8) lijevo. Vidimo da je i dalje  $1^+$  multipol najdominantniji no sada imamo promjene u iznosima udarnih presjeka po multipolima pri temperaturama ispod faznog prijelaza. Iako i u FT-RQRPA računu  $0^+$  multipol zanemarivo doprinosi udarnom presjeku, na slici se mogu vidjeti efekti interakcije sparivanja na nešto višoj temperaturi ( $T = 0.6$  MeV) koja se još uvijek nalazi ispod kritične temperature za fazni prijelaz.

Kako bismo bolje istražili utjecaj  $0^+$  kanala pogledajmo IAR spektar (Izobarna Analogni Rezonancija) za obje jezgre. Radi se o prijelazu Fermijevog tipa kod kojeg ne dolazi do promjene ukupnog angularnog momenta prilikom kvazičestičnih prijelaza. IAR spektar prijelazne snage za jezgre  $^{54}\text{Fe}$  i  $^{56}\text{Fe}$  pri različitim temperaturama se nalazi na slici (6.6). U spektru  $^{54}\text{Fe}$  uočavamo vrh na  $E_{RPA} = 3.36$  MeV koji dominira nad svim ostalima i odgovara dominantno prijelazima  $\pi 2p_{3/2} \rightarrow \nu 2p_{3/2}$  i  $\pi 1f_{7/2} \rightarrow \nu 1f_{7/2}$ , dok se za  $^{56}\text{Fe}$  najveći vrh nalazi na  $E_{RPA} = 17.48$  MeV, te odgovara dominantno prijelazima  $\pi 1f_{7/2} \rightarrow \nu 1f_{7/2}$  i  $\pi 1f_{5/2} \rightarrow \nu 1f_{5/2}$ . Kako bi razumjeli nastanak ovog prijelaza promotimo graf ovisnosti faktora zauzeća neutrona i protona  $v_i^2$  o jednočestičnim energijama  $\epsilon_i$  na slici (6.5) pri temperaturi  $T = 0.3$  MeV. Gornje slike prikazuju faktore zauzeća protona, a donje neutrona. Vidimo da je neutronska stanja  $\nu 1f_{7/2}$  za  $^{56}\text{Fe}$  u potpunosti zauzeto ukoliko u obzir uzmemo samo efekte konačne temperature u sklopu FT-RRPA. U okviru FT-RQRPA izračuna korelacije sparivanja smanjuju faktor zauzeća tog stanja, čime prijelaz  $\pi 1f_{7/2} \rightarrow \nu 1f_{7/2}$  postaje dozvoljen, i značajno doprinosi IAR spektru. U tablici (6.6) su prikazani doprinosi kvazičestičnih parova u IAR spektru, a u tablici (6.7) snaga  $B(\text{IAR})$  za  $^{54}\text{Fe}$ , dok su u tablicama (6.8) i (6.9) prikazani isti za  $^{56}\text{Fe}$ .



Slika 6.5: Slika prikazuje ovisnost FT-HBCS faktora zauzeća  $v_i^2$  o jednočestičnim energijama  $\epsilon_i$  za jezgre  $^{54}\text{Fe}$  i  $^{56}\text{Fe}$  pri temperaturi  $T = 0.3$  MeV, za FT-RRPA proračun i za FT-RQRPA proračun. Na gornjim grafovima su prikazana protonska stanja, a na donjim neutronska.

Tablica 6.6: Doprinis najznačajnijih kvazičestičnih parova prema doprinosu u IAR spektru za jezgru  $^{54}\text{Fe}$  pri temperaturi  $T = 0.3$  MeV, uz  $V_0 = 200$  MeV.

T = 0.3 MeV, $V_0 = 200$ MeV, FT-RQRPA			
E [MeV]	Prijelaz	Rel. snaga (norma) (%)	Snaga
3.36	$(\pi 2p3/2, \nu 2p3/2)$	78.78	-0.19
	$(\pi 1f5/2, \nu 1f5/2)$	12.76	-0.08
	$(\pi 2p1/2, \nu 2p1/2)$	6.09	-0.03
	$(\pi 1f7/2, \nu 1f7/2)$	1.44	0.17

Tablica 6.7: IAR prijelazna snaga za različite energije pobuđenja jezgre  $^{54}\text{Fe}$  pri temperaturi  $T = 0.3$  MeV, uz  $V_0 = 200$  MeV.

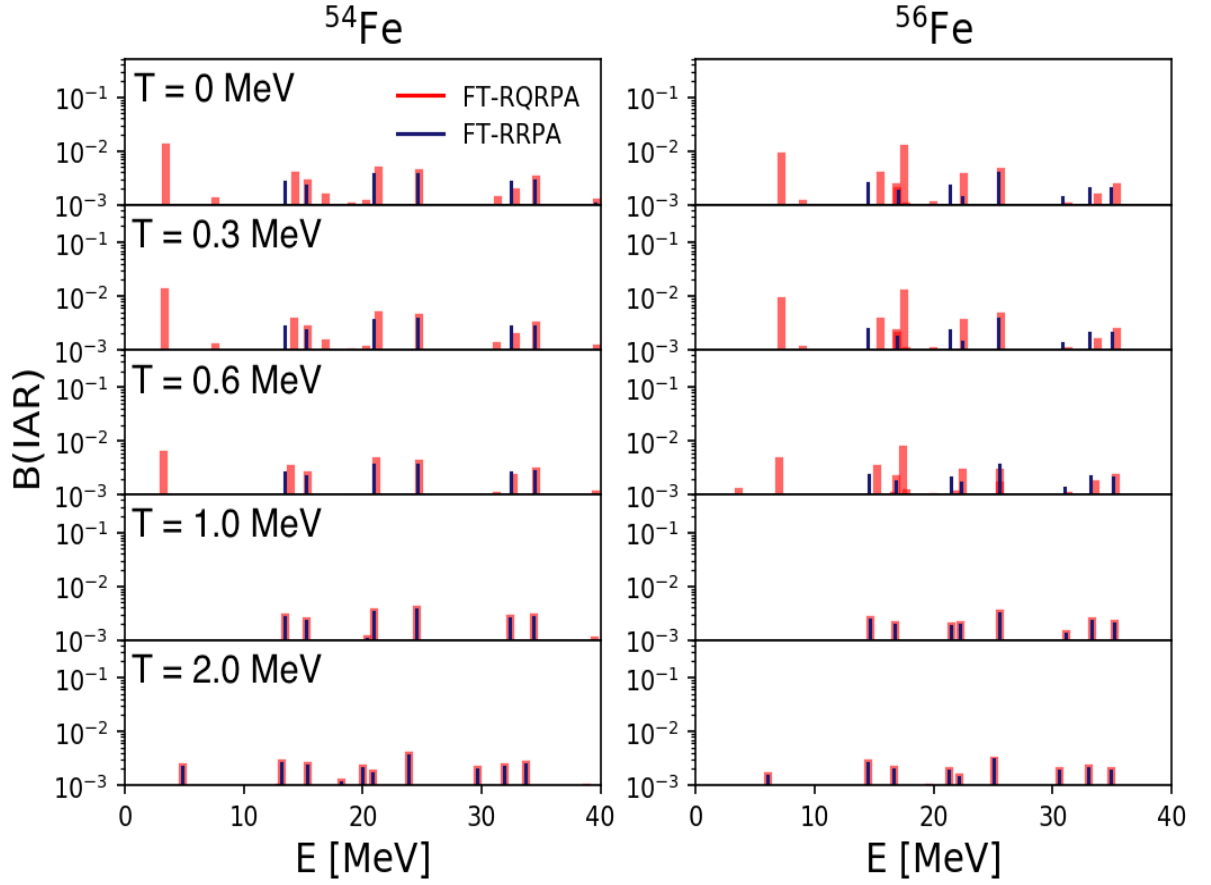
E [MeV]	B(IAR)
3.36	0.01

Tablica 6.8: Doprinis najznačajnijih kvazičestičnih parova prema doprinosu u IAR spektru za jezgru  $^{56}\text{Fe}$  pri temperaturi  $T = 0.3$  MeV, uz  $V_0 = 200$  MeV.

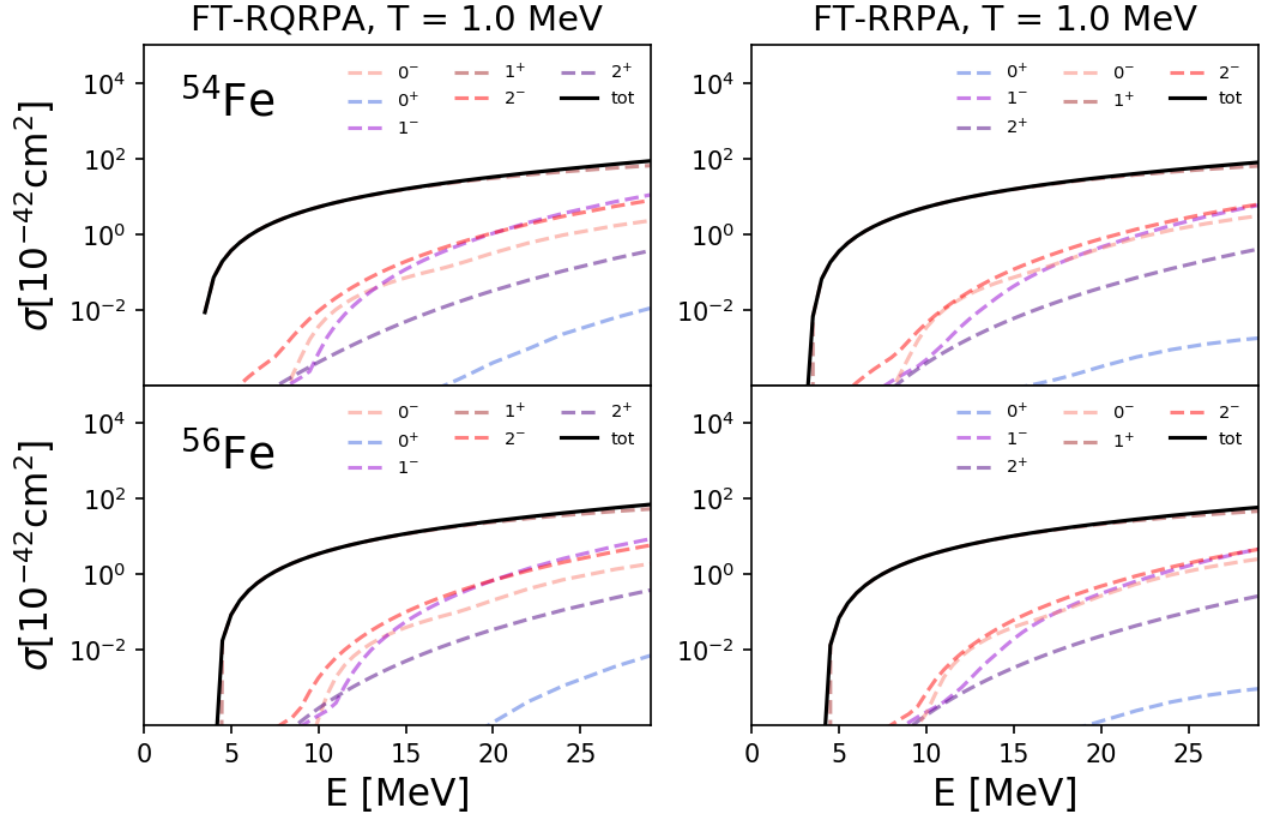
T = 0.3 MeV, $V_0 = 200$ MeV, FT-RQRPA			
E [MeV]	Prijelaz	Rel. snaga (norma) (%)	Snaga
17.48	$(\pi 1g9/2, \nu 1g9/2)$	59.82	0.01
	$(\pi 1f5/2, \nu 1f5/2)$	1.57	-0.03
	$(\pi 1f7/2, \nu 1f7/2)$	0.14	-0.06

Tablica 6.9: IAR prijelazna snaga za različite energije pobuđenja jezgre  $^{56}\text{Fe}$  pri temperaturi  $T = 0.3$  MeV, uz  $V_0 = 200$  MeV.

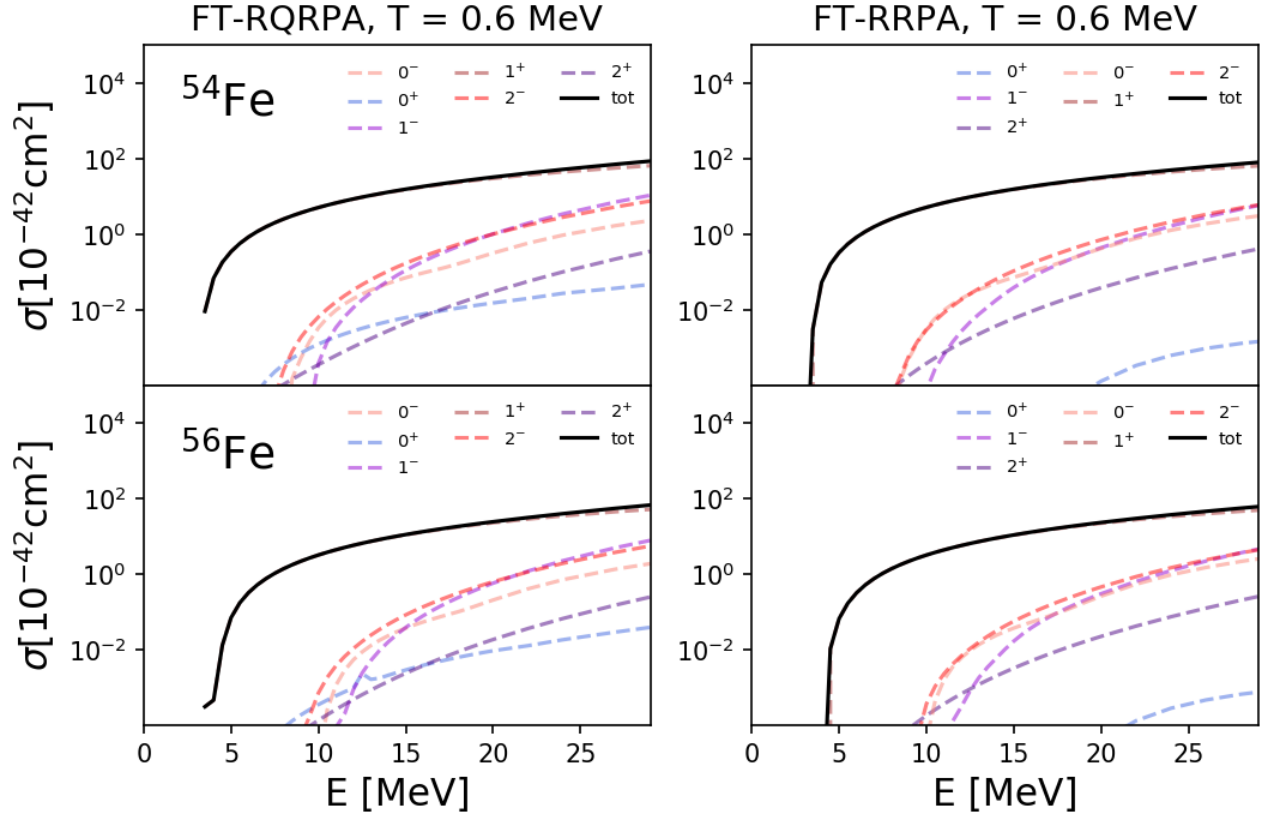
E [MeV]	B(IAR)
17.48	0.01



Slika 6.6: IAR raspodjela prijelazne snage  $B(IAR)$  za jezgre  $^{54}\text{Fe}$  i  $^{56}\text{Fe}$  pri temperaturama  $T = 0, 0.3, 0.6, 1.0$  i  $2.0$  MeV, sa jakosti rezidualne interakcije sparivanja,  $V_0 = 200$  MeV za  $T = 0$  kanal. Jasno je vidljivo kako korelacije sparivanja utječu na pojavljivanje dodatnih vrhova koji zatim nestaju iznad temperature faznog prijelaza te se spektri FT-RQRPA i FT-RRPA računa savršeno podudaraju.

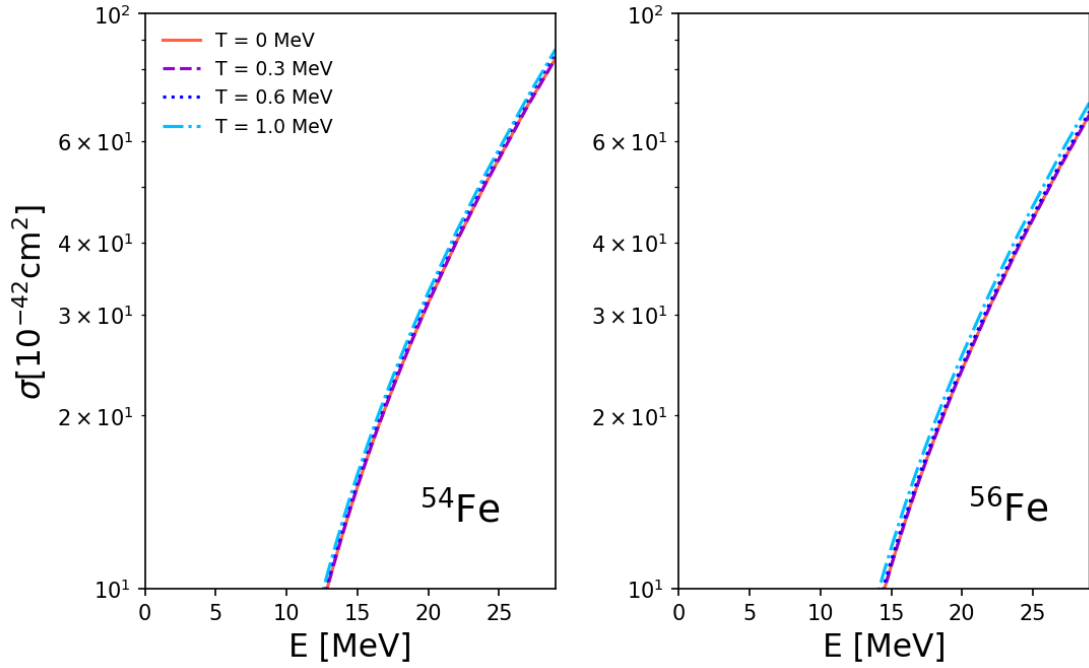


Slika 6.7: Udarni presjek za uhvat elektrona za multipole  $J^\pi = 0^\pm, 1^\pm, 2^\pm$ , na jezgrama  $^{54}\text{Fe}$  i  $^{56}\text{Fe}$  pri temperaturi  $T = 1.0 \text{ MeV}$ . Lijevo se nalaze udarni presjeci po multipolima izračunati uz FT-RQRPA račun, a desno FT-RRPA. Budući da se nalazimo na temperaturama iznad faznog prijelaza nema korelacija sparivanja, te uočavamo poklapanje između rezultata dvije teorije.



Slika 6.8: Udarni presjek za uhvat elektrona za multipole  $J^\pi = 0^\pm, 1^\pm, 2^\pm$ , na jezgrama  $^{54}\text{Fe}$  i  $^{56}\text{Fe}$  pri temperaturi  $T = 0.6 \text{ MeV}$ . Lijevo se nalaze udarni presjeci po multipolima izračunati uz FT-RQRPA račun, a desno FT-RRPA. Temperatura je ispod temperature faznog prijelaza pa korelacije sparivanja imaju značajnu ulogu. Posebno uočavamo multipol  $0^+$  koji u FT-RRPA računu ima najmanju ulogu, a kod FT-RQRPA računa njegova amplituda je porasla, te ga koristimo kao ilustrativan primjer utjecaja korelacija sparivanja (za više pojedinosti pogledati u tekstu).





Slika 6.9: Ovisnost udarnih presjeka o temperaturi za jezgre  $^{54}\text{Fe}$  i  $^{56}\text{Fe}$ , pri temperaturama  $T = 0, 0.3, 0.6$  i  $1.0$  MeV.

Ovisnost udarnog presjeka o temperaturi u sklopu FT-RQRPA je dana na slici (6.9). Izotopi željeza, prema ukupnom iznosu, reproduciraju udarne presjeke slične onima dobivenima u okviru FT-RRPA računa. Kao što smo možemo vidjeti na slici (6.8), dolazi do promjena u udarnom presjeku po multipolima, ali te promjene su zanemarive naspram  $1^+$  multipola, koji ne pokazuje značajnije promjene. Udarne presjeci se ponašaju praktički neovisno o temperaturi sve do temperatura gdje termalno deblokiranje stanja postaje značajnije  $T \sim 1$  MeV. Zaključujemo da se u slučaju izotopa željeza udarni presjek povećava monotono s temperaturom tek za temperature iznad faznog prijelaza. Za jezgre  $^{54}\text{Fe}$  i  $^{56}\text{Fe}$  efekt temperaturnog deblokiranja nije toliko značajan, no vidjet ćemo u sljedećem poglavlju na primjeru germanija da njegov utjecaj može biti jači.

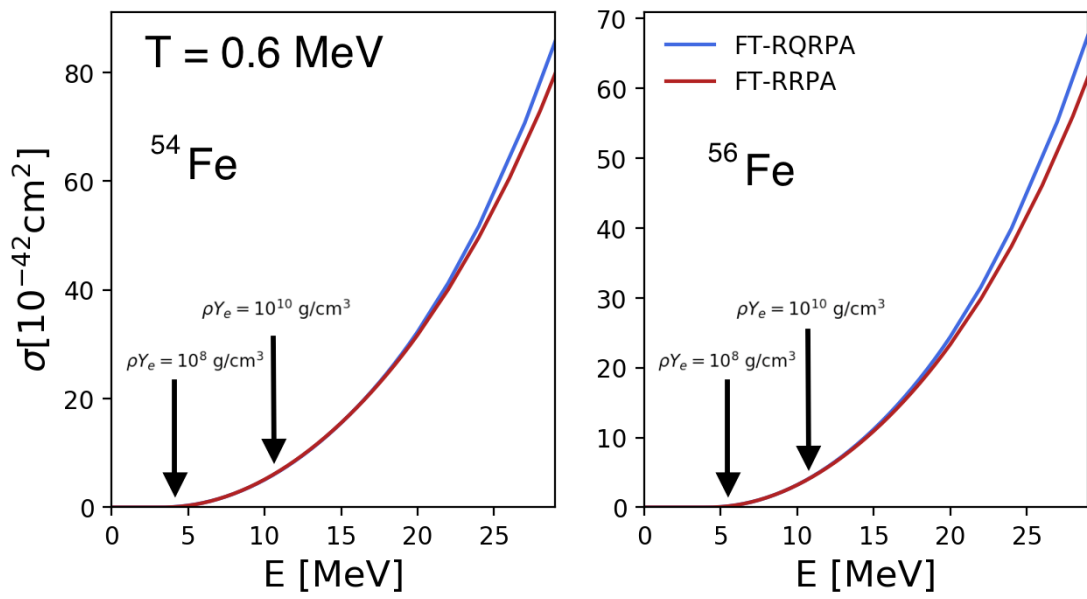
### 6.1.3 Stope uhvata elektrona

Stope uhvata su zapravo usrednjeni udarni presjeci po energiji upadnog elektrona, pomnoženi još s faktorom Fermi-Diracove raspodjele kao što je definirano u (4.43). Rezultate smo izračunali za raspon gustoća  $\rho Y_e = 10^7 \text{ g/cm}^3 - \rho Y_e = 10^{10} \text{ g/cm}^3$ , koje su relevantne za razvoj zvijezda u fazi pred eksploziju supernove [3, 7]. Također, u obzir smo uzeli da se elektroni nalaze u nabijenoj plazmi, stoga je njihov potencijal zasjenjen [50–52]. Rezultati za stope uhvata izračunate FT-RRPA, FT-RQRPA i FT-RQRPA računom uz uključen efekt zasjenjenja se nalaze na slici (6.11). Na slici (6.10) je prikazan ukupni udarni presjek pri temperaturi  $T = 0.6$  MeV za FT-RRPA i FT-RQRPA. Crne strelice

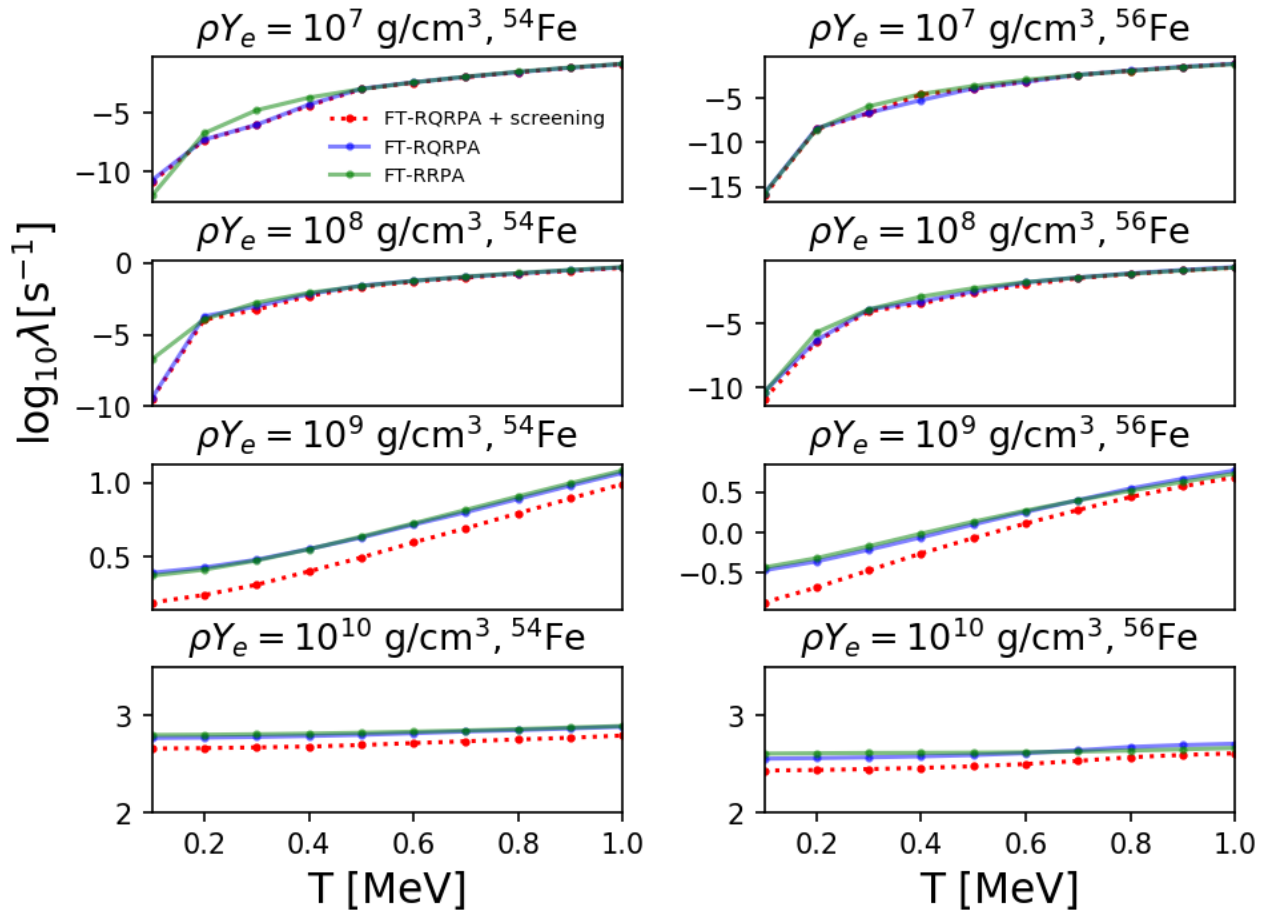
prikazuju energiju upadnog elektrona za koju je podintegralna funkcija (4.43) maksimalna pri zadanoj temperaturi i gustoći. Vidimo da se po iznosu udarni presjeci preklapaju pri gustoćama za koje smo računali stope uhvata i na razmatranoj temperaturi  $T = 0.6$  MeV. Ovo znači da bi se stope uhvata elektrona za jezgre  $^{54}\text{Fe}$  i  $^{56}\text{Fe}$  trebale podudarati pri svim gustoćama za obje teorije. Ovakvo ponašanje možemo vidjeti na slici (6.11). Iako pri  $\rho Y_e = 10^{10}$  g/cm<sup>3</sup> uočavamo odstupanja pri nižim temperaturama, treba imati na umu da je slika ipak uvećana, te da pri porastu energije elektrona dolazi do razlike između FT-RQRPA i FT-RRPA računa. Efekt zasjenjenja na gustoćama  $\rho Y_e = 10^7$  g/cm<sup>3</sup> praktički nema nikakav doprinos, dok na većim gustoćama  $\rho Y_e = 10^{10}$  g/cm<sup>3</sup> vidimo značajnu razliku za obje jezgre. Efekt zasjenjenja efektivno smanjuje kemijski potencijal elektrona, i povećava prag za reakciju uhvata čime smanjuje iznos stopa uhvata u odnosu na one bez zasjenjenja. Kod izračuna stopa uhvata, radi uštede vremena izvođenja koda, uključili smo samo najdominantniji multipol  $J^\pi = 1^+$ .

Pri gustoćama  $\rho Y_e = 10^{10}$  g/cm<sup>3</sup> uočavamo da su stope uhvata praktički neovisne o temperaturi. Budući da je pri toliko velikim gustoćama kemijski potencijal elektrona znatno veći od energije zbog termalnog gibanja elektrona, stope uhvata postaju konstanta s obzirom na temperaturu. Na temperaturi  $T = 0.5$  MeV kemijski potencijal elektrona je  $\sim 11$  MeV.

Iz stopa uhvata za jezgre  $^{54}\text{Fe}$  i  $^{56}\text{Fe}$  vidimo da uključivanje korelacija sparivanja ne unosi značajne promjene u odnosu na izračune dobivene FT-RRPA teorijom. Uzrok tome dolazi već prije od podudaranja udarnih presjeka izračunatih FT-RRPA i FT-RQRPA teorijama.



Slika 6.10: Ukupni udarni presjek  $J \leq 2$  u FT-RQRPA i FT-RRPA izračunima bez logaritamske skale, za jezgre  $^{54}\text{Fe}$  i  $^{56}\text{Fe}$  pri temperaturi  $T = 0.6 \text{ MeV}$ . Crne strelice označavaju energiju elektrona pri gustoćama  $\rho Y_e = 10^8 \text{ g/cm}^3$  i  $\rho Y_e = 10^{10} \text{ g/cm}^3$  za koju je podintegralna funkcija u izrazu (4.43) maksimalna.



Slika 6.11: Ovisnost logaritma stopa uhvata elektrona o temperaturi za jezgre  $^{54}\text{Fe}$  i  $^{56}\text{Fe}$ , pri gustoćama  $10^7$  g/cm $^3$  -  $10^{10}$  g/cm $^3$ . U izračun je uključen samo najdominantniji multipol.

## 6.2 Analiza uhvata elektrona na jezgrama $^{76}\text{Ge}$ i $^{78}\text{Ge}$

Dvije jezgre na kojima se pregledno vidi međuigra efekata konačne temperature i korelacija sparivanja su  $^{76}\text{Ge}$  i  $^{78}\text{Ge}$ . Konstante sparivanja u osnovnom stanju su određene koristeći *3-point* (eng.) relaciju (2.70). Parametri prilagodbe se nalaze u tablici (6.10).

Tablica 6.10: Parametri prilagodbe na eksperimentalne podatke za jezgre  $^{76}\text{Ge}$  i  $^{78}\text{Ge}$ .  $\Delta_{n,p}$  su parametri rascjepa za protone i neutrone, a  $G_{n,p}$  konstante sparivanja kao u relaciji (2.68). Eksperimentalni podaci su dobavljeni iz [54].

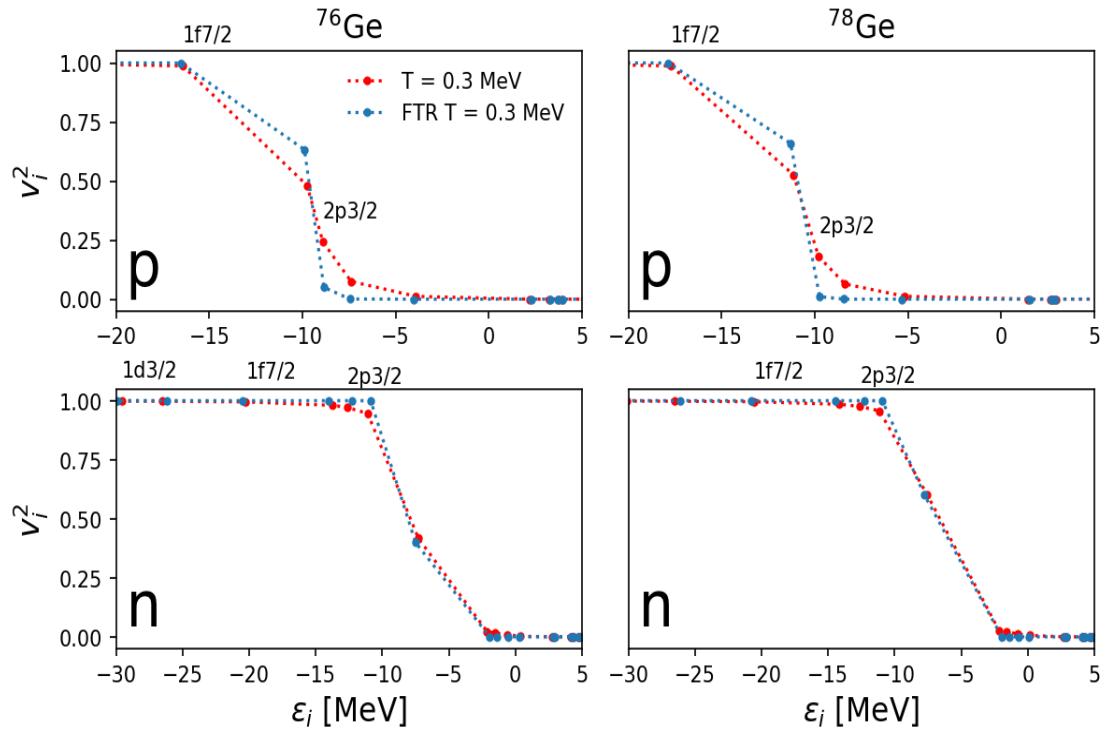
	$\Delta_n^{exp}$ [MeV]	$\Delta_p^{exp}$ [MeV]	$G_n$	$G_p$
$^{76}\text{Ge}$	1.6780	1.5721	28.1911	29.6000
$^{78}\text{Ge}$	1.4900	1.5895	28.1086	31.3392

Ovisnost parametra rascjepa  $\Delta$ , kemijskog potencijala  $\lambda$  i energije sparivanja  $E_{pair}$  o temperaturi je dana na slici (6.13). Vidimo da sada i za slučaj  $^{76}\text{Ge}$  i  $^{78}\text{Ge}$  imamo konačan  $\Delta$ . Za obje jezgre kritična temperatura za neutrone je  $T_c \sim 1.0$  MeV, a za protone  $T_c \sim 1.0$  MeV. Energija sparivanja jasno prati parametar rascjepa te iščezava iznad kritične temperature.

### 6.2.1 Gamow-Teller spektar prijelazne snage

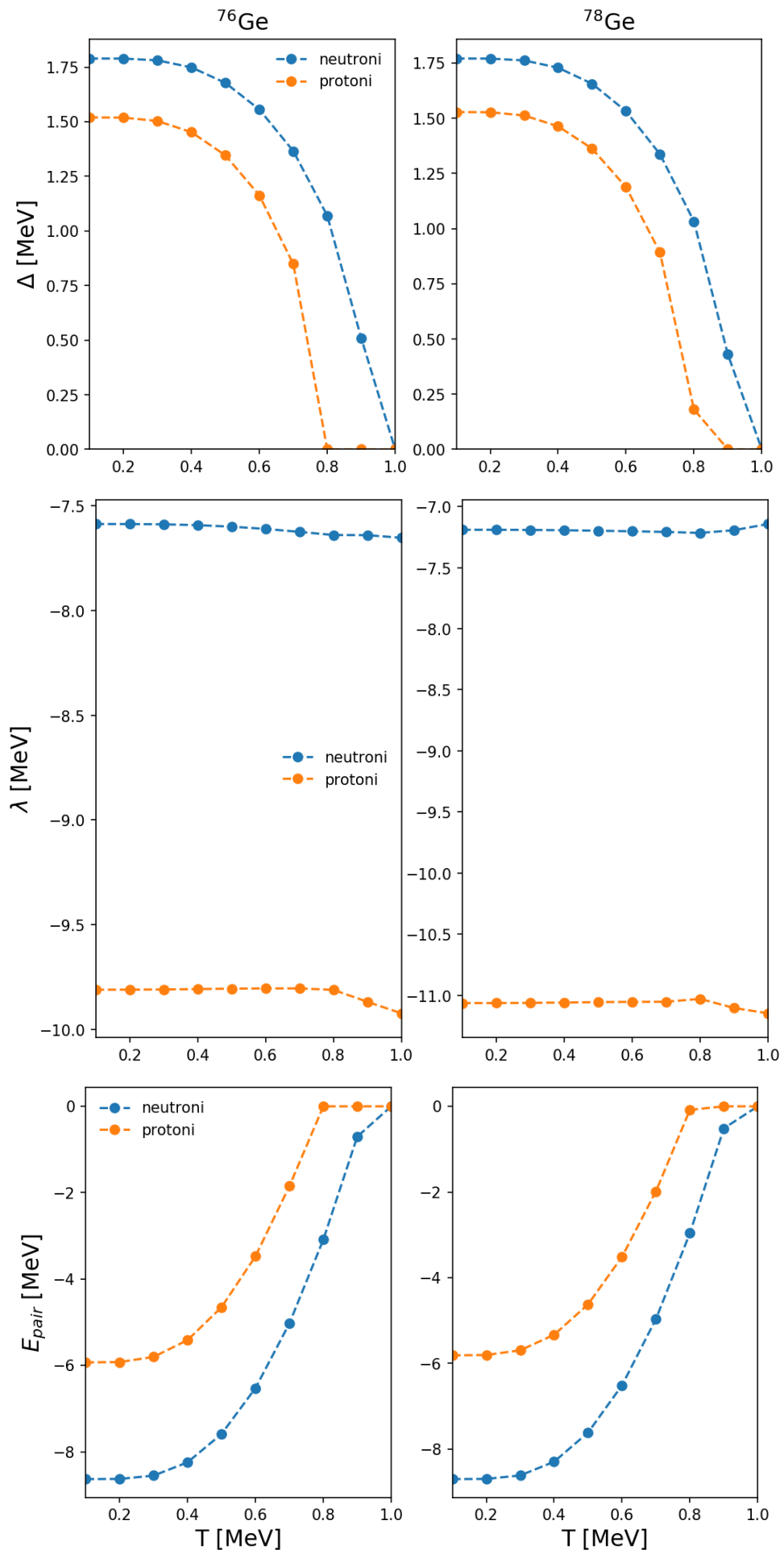
Gamow-Teller prijelazi i za jezgre  $^{76}\text{Ge}$  i  $^{78}\text{Ge}$  ponovno čine veliki udio u ukupnom udarnom presjeku za uхват elektrona, stoga se u ovom potpoglavlju posvećujemo proučavanju prijelazne snage Gamow-Teller spektra. Spektar prijelazne snage se nalazi na slici (6.14). Na istom grafu su prikazani prijelazi izračunati u sklopu FT-RRPA i FT-RQRPA teorije. Posvetimo se prvo analizi  $GT^+$  spektra za jezgru  $^{76}\text{Ge}$ . Tablica (6.11) prikazuje najdominantnije kvazičestične parove, dok je pet najdominantnijih vrhova prikazano u tablici (6.12), pri temperaturi  $T = 0.6$  MeV. Za razliku od FT-RRPA teorije korelacije sparivanja omogućavaju prijelaz  $\pi 1f_{7/2} \rightarrow \nu 1f_{5/2}$  koji je najdominantniji u vrhu pri energiji  $E_{QRPA} = 11.79$  MeV. Sličan vrh kod  $^{78}\text{Ge}$  uočavamo na energiji  $E_{QRPA} = 14.32$  MeV. Kako bismo bolje razumijeli utjecaj korelacija sparivanja na ovaj prijelaz promotrimo ovisnost faktora zauzeća  $\nu_i^2$  o jednočestičnim energijama  $\epsilon_i$  za obje jezgre na slici (6.12). Vidimo da zauzeće neutronske  $\nu 1f_{5/2}$  stanja više nije 100% čime prijelazi u to stanje postaju mogući. Unutar FT-RRPA teorije to stanje je potpuno zauzeto te su navedeni prijelazi blokirani, a to jasno uočavamo na slici (6.14)  $GT^+$  spektra prijelazne snage. Prikaz doprinosa pojedinih prijelaza za  $^{78}\text{Ge}$  se nalazi u tablici (6.13), a pet najdominantnijih vrhova u tablici (6.14).

Ovim smo demonstrirali kako korelacije sparivanja mogu značajno utjecati na ponašanje



Slika 6.12: Slika prikazuje ovisnost FTHBCS faktora zauzeća  $v_i^2$  o jednočestičnim energijama  $\epsilon_i$  za jezgre  $^{76}\text{Ge}$  i  $^{78}\text{Ge}$  pri temperaturi  $T = 0.3$ , za FT-RRPA proračun i za FT-RQRPA proračun.

Gamow-Tellerova spektra prijelazne snage ispod temperature faznog prijelaza. Očekujemo da će se ovakvo ponašanje odraziti i na udarne presjeke. Iznad temperature faznog prijelaza efekti konačne temperature dolaze do izražaja. Pri temperaturi  $T = 2.0$  MeV na slici (6.14) vidimo pojavljivanje novog vrha. Za  $^{76}\text{Ge}$  on se nalazi na  $E_{QRPA} = 4.17$  MeV, dok za  $^{78}\text{Ge}$  na  $E_{QRPA} = 5.08$  MeV, te odgovara u oba slučaja prijelazu  $\pi 1g_{7/2} \rightarrow \nu 1g_{9/2}$ . Očekujemo da će se pri višim temperaturama ovo odraziti na udarne presjeke, a efekt termalnog deblokiranja za germanij je već predstavljen u [16].



Slika 6.13: (gore) Ovisnost energije rascjepa  $\Delta$  o temperaturi. (sredina) Ovisnost kemijskog potencijala  $\lambda$  protona i neutrona o temperaturi. (dolje) Ovisnost energije sparivanja  $E_{pair}$  o temperaturi. Posebno su razmatrana protonska i neutronska stanja za jezgre  $^{76}\text{Ge}$  i  $^{78}\text{Ge}$ .

Tablica 6.11: Tablica prikazuje doprinose najznačajnijih kvazičestičnih parova prema doprinosu u  $GT^+$  spektru za jezgru  $^{76}\text{Ge}$  pri temperaturi  $T = 0.6$  MeV, uz  $V_0 = 200$  MeV.

T = 0.6 MeV, $V_0 = 200$ MeV, FT-RQRPA			
E [MeV]	Prijelaz	Rel. snaga (norma) (%)	Snaga
37.19	$(\pi 4f_{5/2}, \nu 1f_{7/2})$	77.26	-0.13
	$(\pi 4f_{7/2}, \nu 1f_{7/2})$	4.88	-0.02
11.79	$(\pi 1f_{7/2}, \nu 1f_{5/2})$	90.45	0.44
	$(\pi 1f_{5/2}, \nu 1f_{5/2})$	2.43	-0.03
	$(\pi 1f_{7/2}, \nu 1f_{7/2})$	2.01	0.03
	$(\pi 1g_{7/2}, \nu 1g_{9/2})$	1.22	-0.09
	$(\pi 1d_{3/2}, \nu 1d_{5/2})$	0.88	0.01
	$(\pi 2p_{3/2}, \nu 2p_{3/2})$	0.38	-0.03
	$(\pi 2p_{1/2}, \nu 2p_{3/2})$	0.32	-0.04
	$(\pi 1g_{7/2}, \nu 1g_{9/2})$	0.09	-0.07
	$(\pi 2p_{3/2}, \nu 2p_{1/2})$	0.08	-0.02
	$(\pi 1g_{7/2}, \nu 1g_{9/2})$	70.45	0.07
17.28	$(\pi 1f_{7/2}, \nu 1f_{5/2})$	20.80	0.05
	$(\pi 2p_{3/2}, \nu 2p_{3/2})$	0.88	0.01
	$(\pi 1g_{9/2}, \nu 1g_{9/2})$	0.55	0.02
	$(\pi 5p_{3/2}, \nu 2p_{3/2})$	57.72	-0.02
	$(\pi 1d_{5/2}, \nu 1g_{7/2})$	8.81	-0.02
30.93	$(\pi 2s_{1/2}, \nu 2s_{1/2})$	4.88	0.02
	$(\pi 2h_{9/2}, \nu 1f_{7/2})$	3.89	-0.01
	$(\pi 1d_{5/2}, \nu 2d_{3/2})$	2.34	-0.03
	$(\pi 1d_{5/2}, \nu 2d_{5/2})$	0.91	-0.01
	$(\pi 1d_{5/2}, \nu 3d_{3/2})$	90.66	0.11
34.57	$(\pi 1d_{5/2}, \nu 3d_{5/2})$	5.74	0.01

Tablica 6.12:  $GT^+$  prijelazna snaga za energije pobuđenja jezgre  $^{76}\text{Ge}$  pri temperaturi  $T = 0.6$  MeV, uz  $V_0 = 200$  MeV.

E [MeV]	B( $GT^+$ )
37.19	0.04
11.79	0.04
17.28	0.03
30.93	0.02
34.57	0.02

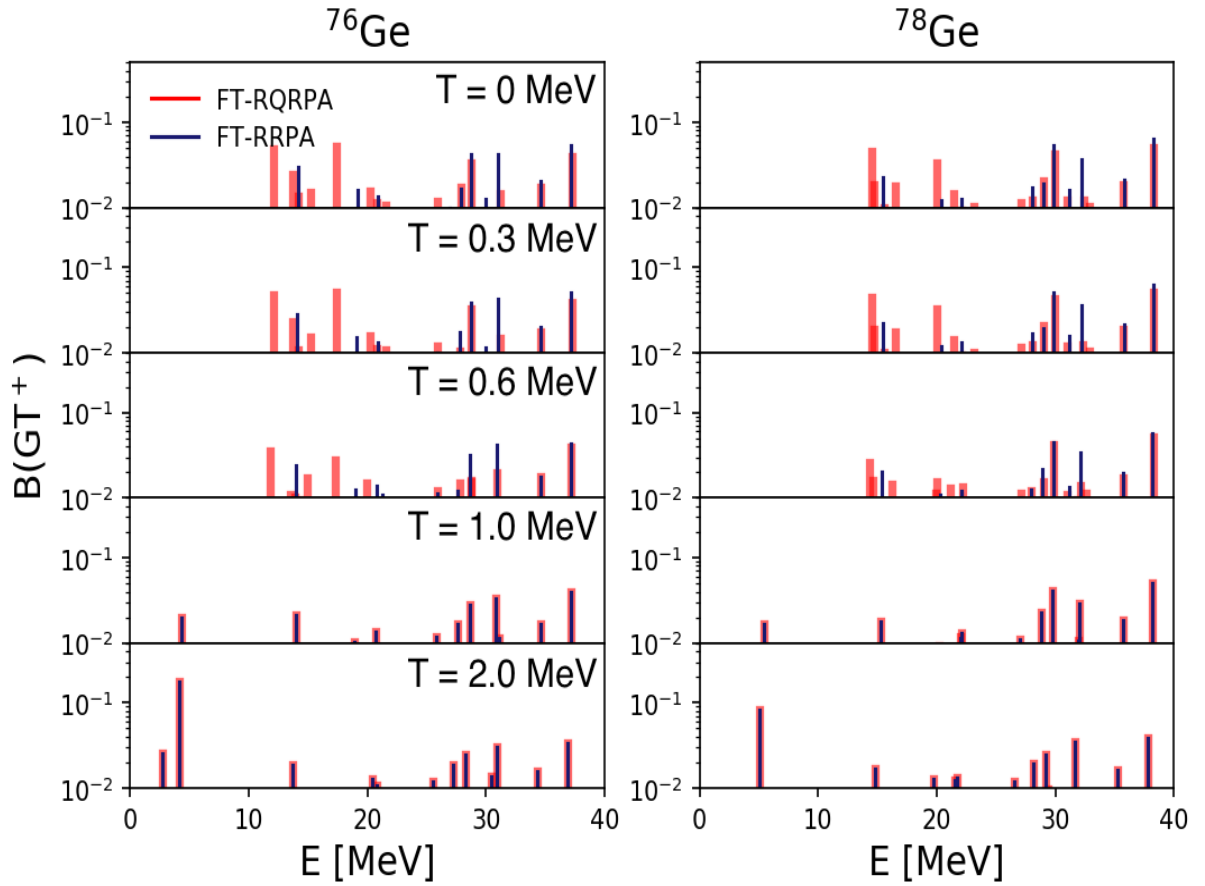


Tablica 6.13: Tablica prikazuje doprinose najznačajnijih kvazičestičnih parova prema doprinosu u GT<sup>+</sup> spektru za jezgru <sup>78</sup>Ge pri temperaturi T = 0.6 MeV, uz V<sub>0</sub> = 200 MeV.

T = 0.6 MeV, V <sub>0</sub> = 200 MeV, FT-RQRPA			
E [MeV]	Prijelaz	Rel. snaga (norma) (%)	Snaga
38.23	( $\pi 4f_{5/2}, \nu 1f_{7/2}$ )	80.88	0.16
	( $\pi 4f_{7/2}, \nu 1f_{7/2}$ )	5.81	0.03
29.87	( $\pi 1d_{5/2}, \nu 2d_{3/2}$ )	76.43	-0.20
	( $\pi 2h_{9/2}, \nu 1f_{7/2}$ )	11.18	0.03
	( $\pi 1d_{5/2}, \nu 1g_{7/2}$ )	4.75	0.02
	( $\pi 1f_{5/2}, \nu 1f_{7/2}$ )	83.25	-0.35
14.32	( $\pi 1f_{7/2}, \nu 1f_{5/2}$ )	8.67	-0.03
	( $\pi 1f_{5/2}, \nu 1f_{5/2}$ )	2.65	0.03
	( $\pi 1f_{7/2}, \nu 1f_{7/2}$ )	2.03	-0.02
	( $\pi 2p_{1/2}, \nu 2p_{3/2}$ )	0.16	0.03
	( $\pi 2p_{3/2}, \nu 2p_{3/2}$ )	0.15	0.02
	( $\pi 1g_{9/2}, \nu 1g_{9/2}$ )	0.08	0.09
	( $\pi 1g_{7/2}, \nu 1g_{9/2}$ )	0.05	0.07
	( $\pi 4d_{3/2}, \nu 1d_{5/2}$ )	62.00	0.11
	( $\pi 4d_{5/2}, \nu 1d_{5/2}$ )	5.83	0.01
	( $\pi 1d_{5/2}, \nu 3d_{3/2}$ )	80.48	-0.11
35.70	( $\pi 1d_{5/2}, \nu 3d_{5/2}$ )	5.53	-0.01

Tablica 6.14: GT<sup>+</sup> prijelazna snaga za različite energije pobuđenja <sup>78</sup>Ge pri temperaturi T = 0.6 MeV, uz V<sub>0</sub> = 200 MeV.

E [MeV]	B(GT <sup>+</sup> )
38.23	0.05
29.87	0.04
14.32	0.03
44.46	0.02
35.70	0.02



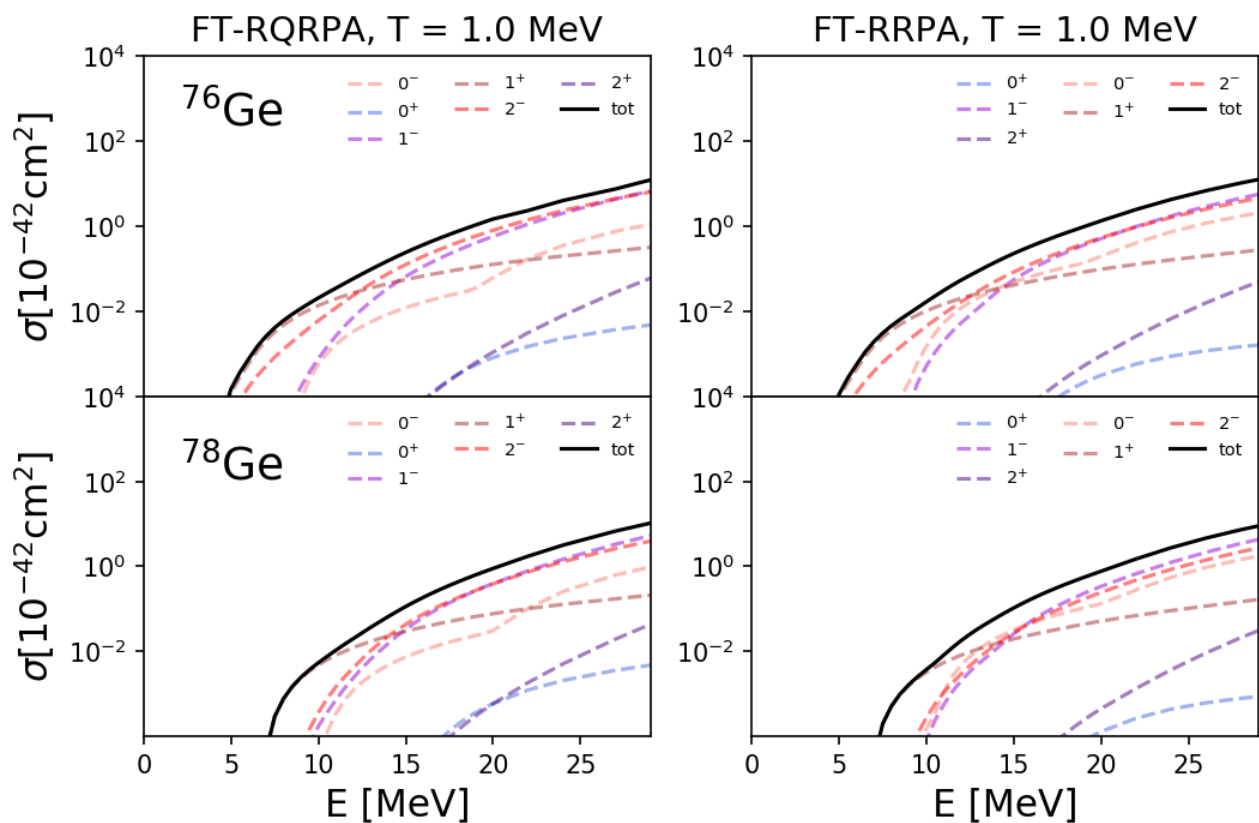
Slika 6.14: Gamow-Teller raspodjela prijelazne snage  $B(GT^+)$  za jezgre  $^{76}\text{Ge}$  i  $^{78}\text{Ge}$  pri temperaturama  $T = 0, 0.3, 0.6, 1.0$  i  $2.0$  MeV, sa jakosti rezidualne interakcije sparivanja,  $V_0 = 200$  MeV.

### 6.2.2 Udarne presjeci u hvata elektrona

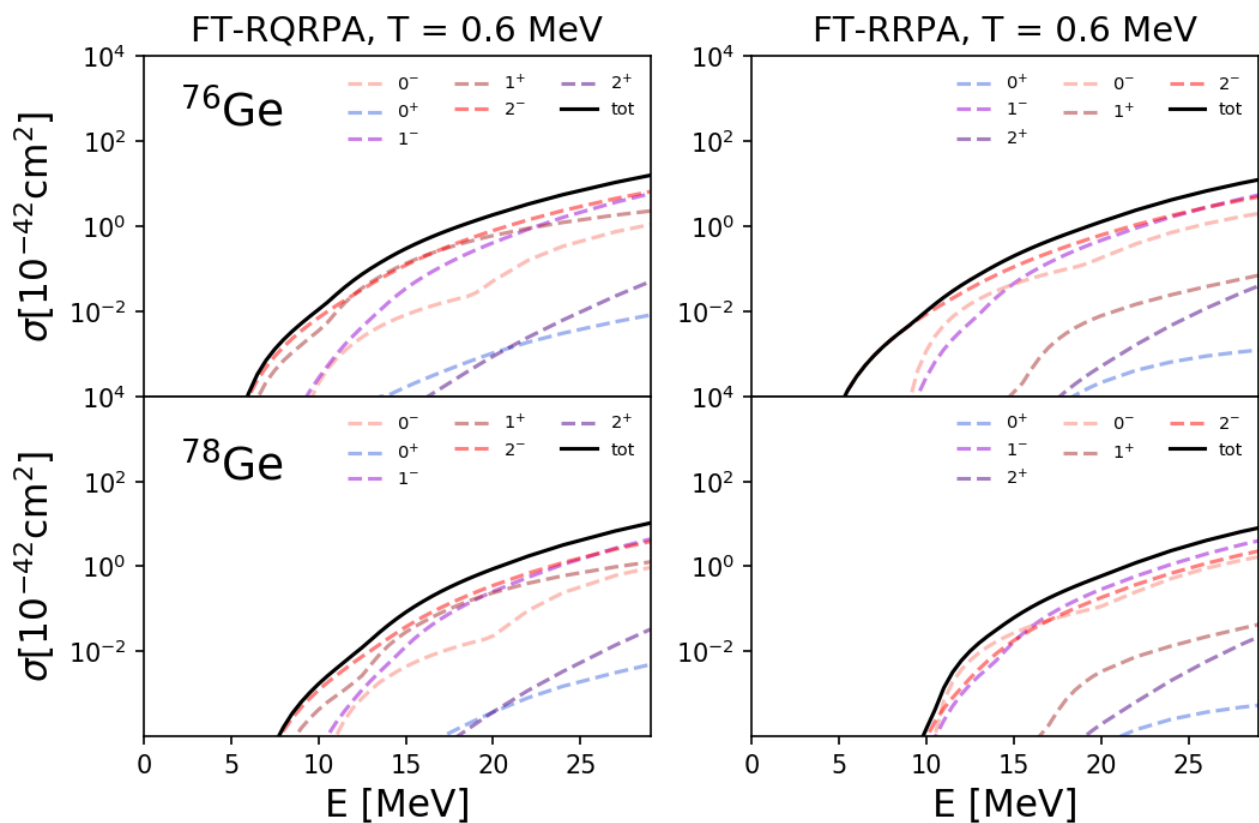
Kod izotopa germanija situacija je kompliciranija nego kod izotopa željeza. Udarne presjeci nisu samo dominirani  $1^+$  Gamow-Teller prijelazom, već i drugi multipoli imaju značajne udjele, nekad čak i veće od  $1^+$  multipola. Shodno tome, izračuni za izotope germanija su značajno dugotrajniji prilikom izvođenja od onih za željezo. Prikaz udarnih presjeka za multipole  $J^\pi = 0^\pm, 1^\pm, 2^\pm$  pri temperaturi  $T = 1.0$  MeV se nalazi na slici (6.15), dok su udarne presjeci na temperaturi  $T = 0.6$  MeV prikazani na slici (6.16). Lijevo se nalaze FT-RQRPA izračuni, a desno FT-RRPA.

Temperatura  $T = 0.6$  MeV se nalazi ispod temperature faznog prijelaza stoga korelacije sparivanja imaju ulogu. Kao što smo već vidjeli pri analizi  $GT^+$  spektra prijelazne snage, Gamow-Teller prijelazi će imati znatno veći utjecaj zbog korelacija sparivanja. To jasno vidimo na slici (6.16), gdje krivulja koja označava  $1^+$  multipol gotovo prati krivulju ukupne sume. Za  $^{76}\text{Ge}$  efekt je izraženiji nego kod  $^{78}\text{Ge}$  zbog dva nepopunjena neutronska stanja. Osim promjena u Gamow-Teller prijelazima, kao i kod izotopa željeza i  $0^+$  prijelazi imaju veći iznos nego FT-RRPA udarne presjeci. Razlozi su identični onima kod analize za izotope željeza. Pri temperaturama ispod temperature faznog prijelaza FT-RQRPA izračun daje veće udarne presjeke nego FT-RRPA, a pri temperaturama iznad faznog prijelaza rezultati se podudaraju prema očekivanjima.

Pri temperaturi  $T = 1.0$  MeV, kao što smo i očekivali udarne presjeci FT-RQRPA i FT-RRPA teorija se podudaraju. Nalazimo se iznad temperature faznog prijelaza pa su udarne presjeci određeni efektima konačne temperature. Daljnim povećanjem temperature dolazi do termalnog deblokiranja neutronskog  $1g_{9/2}$  stanja čime udarne presjeci dodatno porastu u amplitudi. No, zanimljivost kod uključivanja efekata sparivanja nukleona jest da do sličnih efekata dolazi i na znatno nižim temperaturama, što bitno mijenja dinamiku u hvata elektrona u okruženjima koja odgovaraju unutrašnjosti zvijezde.

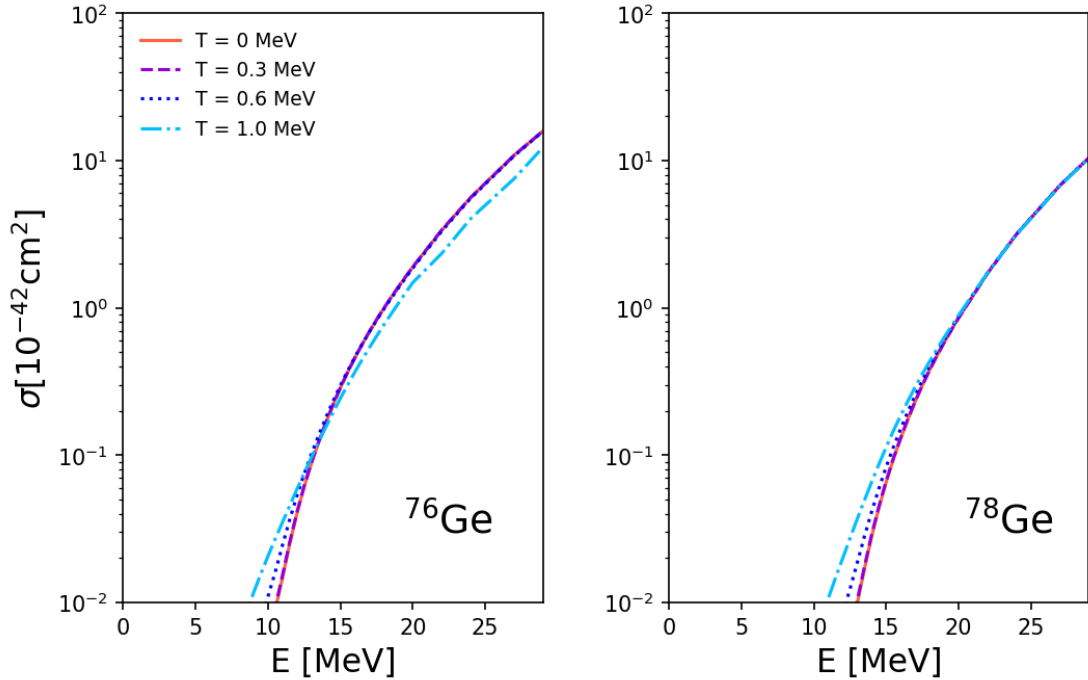


Slika 6.15: Udarni presjeci pojedinih multipola, i ukupni udarni presjek u ovisnosti o energiji upadnog elektrona izračunati koristeći FT-RQRPA (lijevo) i FT-RRPA (desno), za jezgre  $^{76}\text{Ge}$  i  $^{78}\text{Ge}$ , pri temperaturi  $T = 1.0$  MeV.



Slika 6.16: Udarni presjeci pojedinih multipola, i ukupni udarni presjek u ovisnosti o energiji upadnog elektrona izračunati koristeći FT-RQRPA (lijevo) i FT-RRPA (desno), za jezgre  $^{76}\text{Ge}$  i  $^{78}\text{Ge}$ , pri temperaturi  $T = 0.6 \text{ MeV}$ .

Ovisnost ukupnog udarnog presjeka o energiji upadnog elektrona za različite temperature se nalazi na slici (6.17). Ono što odmah uočavamo je da za jezgru  $^{76}\text{Ge}$  imamo skok u iznosu udarnih presjeka za temperature ispod temperature kolapsa sparivanja, i to kao posljedicu deblokiranja neutronske  $\nu 1f_{5/2}$  stanja. Kod  $^{78}\text{Ge}$  taj efekt je manje izražen. Na ponašanju udarnih presjeka  $^{76}\text{Ge}$  s temperaturom jasno možemo vidjeti pojavu faznog prijelaza. Udarne presjeci ispod temperature faznog prijelaza monotonno se povećavaju, te se prag reakcije smanjuje s povećanjem temperature, dok iznad temperature faznog prijelaza imamo oštar pad u udarnim presjecima. Možemo odmah anticipirati da će se slično ponašanje uočiti kod stopa uhvata. Ovisnost udarnih presjeka o temperaturi je znatno različita od one kod izotopa željeza, gdje nemamo ovakav pad u iznosu udarnih presjeka s povećanjem temperature iznad temperature faznog prijelaza. Daljnjim porastom temperature dolazi do deblokiranja  $1g_{9/2}$  stanja te udarni presjeci monotonno rastu s temperaturom po iznosu, te FT-RRPA i FT-RQRPA izračuni daju slično ponašanje.



Slika 6.17: Ovisnost udarnih presjeka o temperaturi za jezgre  $^{76}\text{Ge}$  i  $^{78}\text{Ge}$ , pri temperaturama  $T = 0, 0.3, 0.6$  i  $1.0$  MeV.

### 6.2.3 Stope uhvata elektrona

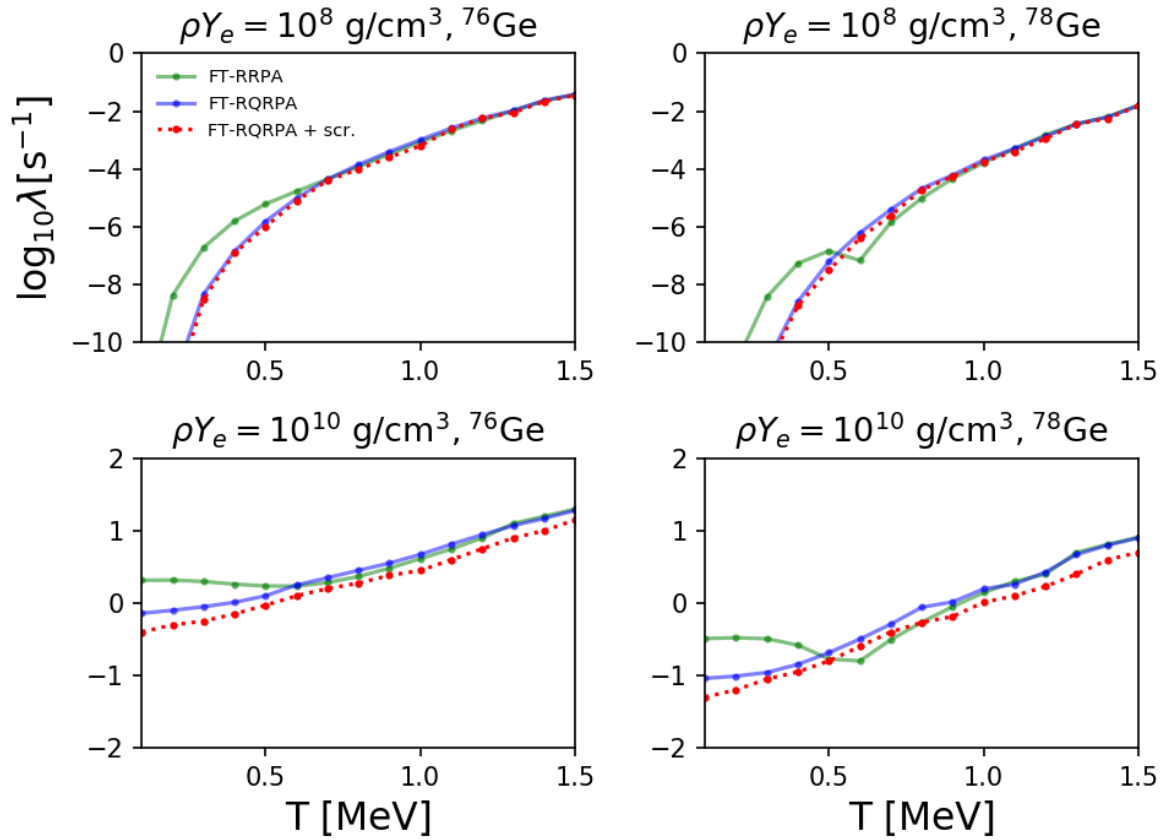
Stope uhvata elektrona za jezgre  $^{76}\text{Ge}$  i  $^{78}\text{Ge}$  smo računali za gustoće  $\rho Y_e = 10^8$  g/cm<sup>3</sup> i  $\rho Y_e = 10^{10}$  g/cm<sup>3</sup>, a prikazane su na slici (6.18). Radi se o znatno većem konfiguracijskom prostoru u odnosu na izotope željeza, pa smo se zadržali na ove dvije vrijednosti gustoće koje su nam dovoljne za istraživanje promjena koje uvodi uključivanje korelacija sparivanja. Budući da kod izotopa germanija imamo i značajan doprinos drugih multipola

(osim Gamow-Tellerovih prijelaza kao u slučaju željeza) i njih je potrebno uključiti u proračun stopa uhvata.

Za slučaj jezgre  $^{76}\text{Ge}$  pri nižim temperaturama imamo veći iznos logaritma stopa uhvata za FT-RRPA proračun, što je potpuno u skladu s ponašanjem udarnih presjeka pri maksimumu podintegralne funkcije u izrazu (4.43). No, pri temperaturi oko  $T \sim 0.6$  MeV dolazi do izjednačavanja stopa uhvata dvaju proračuna te uključivanjem korelacija sparivanja imamo više stope uhvata sve do njihovog kolapsa nakon kojeg oba izračuna predviđaju jednake rezultate. Za razliku od ponašanja stopa uhvata na jezgrama željeza na slici (6.11) pri gustoći  $\rho Y_e = 10^{10}$  g/cm<sup>3</sup> nemamo konstantno ponašanje stopa uhvata s temperaturom. Dolazi do međugre efekata korelacija sparivanja i konačne temperature, što uzrokuje blagi porast stopa uhvata. Stope uhvata izračunate uz uključen efekt zasjenjivanja potencijala elektrona se ponašaju kako smo i mogli predvidjeti - smanjuju se po iznosu, to više pri većim gustoćama.

Stope uhvata  $^{78}\text{Ge}$  imaju slično ponašanje s temperaturom, gdje uključivanjem korelacija sparivanja imamo veće stope uhvata pri nižim temperaturama, te se nakon temperature faznog prijelaza FT-RQRPA i FT-RRPA proračuni savršeno podudaraju. Zanimljivo je promotriti nagli pad u stopama uhvata kod FT-RRPA teorije pri temperaturi  $T \sim 0.6$  MeV. Pad imamo pri obje gustoće za koje smo radili proračune. Objašnjenje ovog leži u efektima konačne temperature, pri čemu je iznos udarnih presjeka za  $^{76}\text{Ge}$  manji pri temperaturi  $T = 0.6$  MeV u odnosu na niže temperature. Uzrok odmah možemo vidjeti ako pogledamo Gamow-Teller spektar prijelazne snage na slici (6.14) za FT-RRPA proračune, gdje vidimo da dolazi do smanjivanja snage pojedinih vrhova pri  $T = 0.6$  MeV.

Na primjeru izotopa germanija smo demonstrirali da uključivanje korelacija sparivanja u sklopu FT-RQRPA teorije značajno mijenja stope uhvata elektrona pri temperaturama ispod temperature faznog prijelaza.



Slika 6.18: Ovisnost logaritma stopa uhvata elektrona o temperaturi za jezgre  $^{76}\text{Ge}$  i  $^{78}\text{Ge}$ , pri gustoćama  $10^8 \text{ g/cm}^3$  i  $10^{10} \text{ g/cm}^3$ . U izračun su uključeni multipoli  $J^\pi = 0^\pm, 1^\pm, 2^\pm$ .



## 7 Zaključak

U ovom radu istražili smo formalizam FT-HBCS teorije za određivanje jednočestične baze nuklearnih jezgara te FT-RQRPA teorije za kanal izmjene proton-neutron za izračun pobuđenih stanja. Koristeći FT-HBCS + FT-RQRPA uspostavili smo model za izračun udarnih presjeka za uхват elektrona na jezgrama koji sustavno uključuje efekte temperature i efekte korelacija sparivanja nukleona zajedno. Naš račun je samosuglasan pri čemu smo koristili DD-ME2 [23] skup parametara za interakciju koji je popisan u tablici (2.1). Konzistentnost računa smo provjerili Ikeda pravilom sume (3.74) koje je pri svakom izračunu bilo zadovoljeno do na  $\sim 90\%$  ukupne snage. Na slikama (3.3) smo pokazali da uključivanjem antičestičnih stanja u potpunosti zadovoljavamo Ikeda pravilo sume.

Dodatna provjera konzistentnosti je usporedba rezultata FT-RQRPA modela sa FT-RRPA [16, 32] teorijom koja ne uključuje korelacije sparivanja već samo efekte konačne temperature. Pri temperaturi faznog prijelaza dolazi do kolapsa interakcije sparivanja te iznad te temperature imamo samo utjecaj efekata konačne temperature. U ovom radu smo istražili limes FT-RQRPA teorije iznad temperature faznog prijelaza te dobili odlično slaganje između dvaju izračuna što je daljnja potvrda konzistentnosti naše teorije.

Rezultate smo prezentirali u poglavlju (6) za jezgre  $^{54}\text{Fe}$  i  $^{56}\text{Fe}$ , te  $^{76}\text{Ge}$  i  $^{78}\text{Ge}$  za raspon temperatura od 0 - 2 MeV. U danom rasponu smo obuhvatili i kolaps interakcije sparivanja te efekte konačne temperature. Već je od prije poznato da za izotope germanija imamo izražen efekt termalnog deblokiranja stanja, koje uzrokuje pojavljivanje dodatnih vrhova u Gamow-Teller spektru prijelazne snage, što možemo vidjeti na slici (6.14) [8, 16].

Za izotope  $^{54}\text{Fe}$  i  $^{56}\text{Fe}$  izračuni za udjele pojedinih multipola u ukupnom udarnom presjeku za temperature  $T = 0.6$  MeV (ispod temperature faznog prijelaza), te  $T = 1.0$  MeV (iznad temperature faznog prijelaza) se nalaze na slikama (6.8) i (6.7), dok je ovisnost udarnog presjeka uhvata elektrona o temperaturi dana na slici (6.9). Demonstrirali smo da FT-RQRPA proračun ne mijenja značajno ponašanje udarnih presjeka. Uočili smo povećanje amplitude udarnog presjeka za multipol  $0^+$  kojeg smo objasnili smanjivanjem faktora zauzeća pojedinih neutronske stanja zbog efekata korelacija sparivanja. No, multipol  $0^+$  ipak ostaje zanemariv u odnosu na dominantne Gamow-Teller prijelaze koji ne pokazuju značajne promjene. Rezultati stopa uhvata elektrona se nalaze na slici (6.11) te značajnija odstupanja između FT-RRPA i FT-RQRPA proračuna uočavamo

pri gustoći  $\rho Y_e = 10^{10}$  g/cm<sup>3</sup>, dok se iznad temperature faznog prijelaza stope uhvata dvaju proračuna podudaraju. Također, u razmatranje stopa uhvata smo uključili i efekt zasjenjenja elektrona te pokazali da zasjenjenje dovodi do dodatnog smanjivanja stopa uhvata [51, 52].

Rezultati za ovisnost udarnih presjeka izotopa germanija <sup>76</sup>Ge i <sup>78</sup>Ge o temperaturi su dani na slici (6.17), dok su pojedini multipoli u udarnom presjeku na temperaturi  $T = 0.6$  MeV i  $1.0$  MeV dani na slikama (6.16) i (6.15). Uočili smo da korelacije sparivanja dovode do postojanja novih vrhova u Gamow-Teller spektru prijelazne snage, što je prikazano na slici (6.14). Ovo izravno utječe na ponašanje udarnih presjeka te za <sup>76</sup>Ge imamo značajno povećanje amplitude  $1^+$  multipola kod FT-RQRPA teorije u odnosu na FT-RRPA proračune. Slično ponašanje se onda može uočiti i kod stopa uhvata elektrona na slici (6.18). Zaključili smo da korelacije sparivanja kod izotopa germanija, a pogotovo <sup>76</sup>Ge dovode do povećanja uloge Gamow-Teller prijelaza na ukupne udarne presjeke, stoga je efekt potrebno uključiti prilikom proračuna reakcija uhvata elektrona.

U uvodnom poglavlju (1) smo objasnili važnost uhvata elektrona kod faze razvoja zvijezda koja prethodi eksploziji supernove. Pokazali smo da se stope uhvata elektrona mijenjaju uključivanjem efekata sparivanja nukleona, a shodno tome zanimljivo bi bilo proučiti kako ove promjene utječu na dinamiku razvoja zvijezda u sklopu kodova koji opisuju eksploziju supernove. Kao nastavak na ovaj rad, potrebno je pronaći i druge primjere jezgara, osim izotopa germanija, kod kojih korelacije sparivanja značajno mijenjaju stope uhvata elektrona, a koje su značajno zastupljene u unutrašnjosti zvijezde pred eksploziju supernove.

# Dodaci

## Dodatak A Izvodi kod teorije uhvata elektrona

### A.1 Razvoj po multipolima

Krenimo od općenitog razvoja eksponencijalne funkcije [47]

$$\mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = \sum_l \sum_J i^l \sqrt{4\pi(2l+1)} j_l(kx) C_{l01\lambda}^{J\lambda} \mathbf{y}_{Jl}^l(\Omega_x), \quad (\text{A.1})$$

gdje je  $j_l(kx)$  sferična Besselova funkcija,  $C_{l01\lambda}^{J\lambda}$  Clebsch-Gordanov koeficijent, a  $\mathbf{y}_{Jl}^l$  vektorska kuglina funkcija. Ograničimo se prvo na slučaj  $\lambda = +1$ . Slijedi

$$\mathbf{e}_{\mathbf{k}+1} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = \sum_l \sum_J i^l \sqrt{4\pi(2l+1)} j_l(kx) C_{l011}^{J1} \mathbf{y}_{Jl}^1(\Omega_x). \quad (\text{A.2})$$

Prema vezanju angularnog momenta možemo imati  $l = J, J \pm 1$ ,

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{J \geq 1} \left\{ i^J \sqrt{4\pi(2J+1)} j_J(kx) C_{J011}^{J1} \mathbf{y}_{JJ}^1 \right. \\ \left. + i^{J+1} \sqrt{4\pi(2J+3)} j_{J+1}(kx) C_{J+1011}^{J1} \mathbf{y}_{JJ+11}^1 \right. \\ \left. + i^{J-1} \sqrt{4\pi(2J-1)} j_{J-1}(kx) C_{J-1011}^{J1} \mathbf{y}_{JJ-11}^1 \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Vrijedi

$$\begin{aligned} C_{J011}^{J1} &= -\frac{1}{\sqrt{2}}, \\ C_{J+1011}^{J1} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{J}{2J+3}}, \\ C_{J-1011}^{J1} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{J+1}{2J-1}}. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{J \geq 1} \left\{ i^J \sqrt{4\pi(2J+1)} j_J(kx) \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \mathbf{y}_{JJ}^1 \right. \\ \left. + i^{J+1} \sqrt{4\pi(2J+3)} j_{J+1}(kx) \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{J}{2J+3}} \mathbf{y}_{JJ+11}^1 \right. \\ \left. + i^{J-1} \sqrt{4\pi(2J-1)} j_{J-1}(kx) \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{J+1}{2J-1}} \mathbf{y}_{JJ-11}^1 \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Promotrimo sljedeći identitet iz [47]

$$\begin{aligned} \nabla \times [j_J(kr) \mathbf{y}_{JJ1}^M] &= i \sqrt{\frac{J}{2J+1}} \left( k \frac{d}{d(kr)} - \frac{J}{kr} \right) j_J(kr) \mathbf{y}_{JJ+11}^M \\ &\quad + i \sqrt{\frac{J+1}{2J+1}} \left( k \frac{d}{d(kr)} + \frac{J+1}{kr} \right) j_J(kr) \mathbf{y}_{JJ-11}^M. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow &= i \sqrt{\frac{J}{2J+1}} \left( -k j_{J+1}(kr) + \cancel{\frac{J}{kr} j_J(kr)} - \cancel{\frac{J}{kr} j_J(kr)} \right) \mathbf{y}_{JJ+11}^M \\ &\quad + i \sqrt{\frac{J+1}{2J+1}} \left( k j_{J-1}(kr) - \cancel{\frac{J+1}{kr} j_J(kr)} + \cancel{\frac{J+1}{kr} j_J(kr)} \right) \mathbf{y}_{JJ-11}^M \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

$$\Rightarrow = i \sqrt{\frac{J}{2J+1}} (-k) j_{J+1}(kr) \mathbf{y}_{JJ+11}^M + i \sqrt{\frac{J+1}{2J+1}} k j_{J-1}(kr) \mathbf{y}_{JJ-11}^M. \quad (\text{A.8})$$

Zadnja dva člana u izrazu (A.5) glase

$$\begin{aligned} &i^{J+1} \sqrt{2\pi} j_{J+1}(kx) \mathbf{y}_{JJ+11}^1 + i^{J-1} \sqrt{2\pi(J+1)} j_{J-1}(kx) \mathbf{y}_{JJ-11}^1 \\ &= i^J \sqrt{2\pi} \left( i \sqrt{J} j_{J+1}(kx) \mathbf{y}_{JJ+11}^1 - i \sqrt{J+1} j_{J-1}(kx) \mathbf{y}_{JJ-11}^1 \right) \\ &= i^J \sqrt{2\pi} \sqrt{2J+1} \frac{1}{(-k)} \nabla \times [j_J(kx) \mathbf{y}_{JJ1}^1]. \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Konačno vrijedi

$$\mathbf{e}_{k+1} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} = - \sum_{J \geq 1} i^J \sqrt{2\pi(2J+1)} \left\{ j_J(kx) \mathbf{y}_{JJ1}^1 + \frac{1}{k} \nabla \times [j_J(kx) \mathbf{y}_{JJ1}^1] \right\}. \quad (\text{A.10})$$

Kod slučaja  $\lambda = -1$ , drugi član evidentno ostaje isti, dok prvi član promijeni predznak. U to se možemo lako uvjeriti ako pogledamo vrijednosti CG koeficijenata koji se pojavljuju u izvodu

$$\begin{aligned} C_{J01-1}^{J-1} &= + \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ C_{J+101-1}^{J1} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{J+1}{2J-1}, \\ C_{J-101-1}^{J-1} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{J}{2J+3}. \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Vidimo da prvi koeficijent u nizu jedini promijeni predznak pa općenito možemo pisati

$$\mathbf{e}_{k\lambda} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} = - \sum_{J \geq 1} \sqrt{2\pi(2J+1)} i^J \left\{ \lambda j_J(kx) \mathbf{y}_{JJ1}^\lambda - \frac{1}{k} \nabla \times [j_J(kx) \mathbf{y}_{JJ1}^\lambda] \right\} \quad \lambda = \pm 1. \quad (\text{A.12})$$

Preostalo je još dokazati razvoj za  $\lambda = 0$ . Analogno krećemo od izraza

$$\mathbf{e}_{k0} e^{ik \cdot x} = \sum_l \sum_J i^l \sqrt{4\pi(2l+1)} j_l(kx) C_{l010}^{J0} \mathbf{y}_{Jl}^0. \quad (\text{A.13})$$

Vrijedi  $l = J \pm 1$

$$\begin{aligned} \sum_{J \geq 0} \left\{ i^{J+1} \sqrt{4\pi(2J+3)} j_{J+1}(kx) C_{J+1010}^{J0} \mathbf{y}_{JJ+1}^0 \right. \\ \left. + i^{J-1} \sqrt{4\pi(2J-1)} j_{J-1}(kx) C_{J-1010}^{J0} \mathbf{y}_{JJ-1}^0 \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Sada izvrijednimo potrebne CG koeficijente

$$\begin{aligned} C_{J+1010}^{J0} &= -\sqrt{\frac{J+1}{2J+3}}, \\ C_{J-1010}^{J0} &= \sqrt{\frac{J}{2J-1}}. \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

$$\Rightarrow \sum_{J \geq 0} \left\{ i^{J+1} \sqrt{4\pi(J+1)} j_{J+1}(kx) (-) \mathbf{y}_{JJ+1}^0 + i^{J-1} \sqrt{4\pi J} j_{J-1}(kx) \mathbf{y}_{JJ-1}^0 \right\}. \quad (\text{A.16})$$

Koristimo identitet [47]

$$\begin{aligned} \nabla(j_J(kr) Y_{JM}) &= \sqrt{\frac{J}{2J+1}} \left( k \frac{d}{d(kr)} + \frac{J+1}{kr} \right) j_J(kr) \mathbf{y}_{JJ-1}^M \\ &\quad - \sqrt{\frac{J+1}{2J+1}} \left( k \frac{d}{d(kr)} - \frac{J}{kr} \right) j_J(kr) \mathbf{y}_{JJ+1}^M \\ &= \sqrt{\frac{J}{2J+1}} \left( k j_{J-1}(kr) - \cancel{\frac{J+1}{kr} j_J(kr)} + \cancel{\frac{J+1}{kr} j_J(kr)} \right) \mathbf{y}_{JJ-1}^M \\ &\quad - \sqrt{\frac{J+1}{2J+1}} \left( -k j_{J+1}(kr) + \cancel{\frac{J}{kr} j_J(kr)} - \cancel{\frac{J}{kr} j_J(kr)} \right) \mathbf{y}_{JJ+1}^M \\ &= \sqrt{\frac{J}{2J+1}} k j_{J-1}(kr) \mathbf{y}_{JJ-1}^M + \sqrt{\frac{J+1}{2J+1}} k j_{J+1}(kr) \mathbf{y}_{JJ+1}^M \\ &\xrightarrow{M=0} \sqrt{\frac{J}{2J+1}} k j_{J-1}(kr) \mathbf{y}_{JJ-1}^0 + \sqrt{\frac{J+1}{2J+1}} k j_{J+1}(kr) \mathbf{y}_{JJ+1}^0 \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Usporedbom sa rezultatom (A.14) dolazimo do konačnog izraza

$$\mathbf{e}_{k0} e^{ik \cdot x} = -\frac{i}{k} \sum_{J \geq 0} i^J \sqrt{4\pi(2J+1)} \nabla[j_J(kx) Y_{J0}] \quad , \lambda = 0. \quad (\text{A.18})$$

Nama trebaju konjugirani izrazi (A.12) i (A.18), a prilikom konjugacije vektorskih kuglinih funkcija vrijedi [47]

$$(\mathbf{y}_{JJ}^\lambda)^\dagger = -(-1)^\lambda \mathbf{y}_{JJ}^{-\lambda}. \quad (\text{A.19})$$

Konjugirani izrazi glase

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{\mathbf{k}0}^\dagger e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} &= - \sum_{J \geq 1} \sqrt{2\pi(2J+1)} (-i)^J \left\{ \lambda j_J(kx) \mathbf{Y}_{JJ1}^{-\lambda} - \frac{1}{k} \nabla \times [j_J(kx) \mathbf{Y}_{JJ1}^{-\lambda}] \right\} \quad \lambda = \pm 1, \\ \mathbf{e}_{\mathbf{k}0}^\dagger e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} &= \frac{i}{k} \sum_{J \geq 0} (-i)^J \sqrt{4\pi(2J+1)} \nabla [j_J(kx) Y_{J0}] \quad , \lambda = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

## A.2 Sređivanje izraza za matrični element

Kako bi došli od izraza (A.21) do konačnog izraza za usrednjenu amplitudu (4.39) potrebno je iskoristiti nekoliko trikova. Krećemo od računa usrednjenog kvadrata amplitude

$$\begin{aligned} \frac{1}{2J_i+1} \sum_{M_i} \sum_{M_f} |\langle f | \hat{H}_W | i \rangle|^2 &= \frac{1}{2J_i+1} \sum_{M_i} \sum_{M_f} \\ &\frac{G^2}{2} \left\{ - \sum_{J \geq 1} (-i)^J \sqrt{2\pi(2J+1)} \sum_{\lambda=\pm 1} l_\lambda (-1)^{J_f-M_f} \begin{pmatrix} J_f & J & J_i \\ -M_f & -\lambda & M_i \end{pmatrix} [\lambda \langle J_f | \hat{\mathcal{T}}_J^{mag}(\kappa) | J_i \rangle + \langle J_f | \hat{\mathcal{T}}_J^{el}(\kappa) | J_i \rangle] \right. \\ &+ \sum_{J \geq 0} (-i)^J \sqrt{4\pi(2J+1)} (-1)^{J_f-M_f} \begin{pmatrix} J_f & J & J_i \\ -M_f & 0 & M_i \end{pmatrix} [l_3 \langle J_f | \hat{\mathcal{L}}_J(\kappa) | J_i \rangle - l_0 \langle J_f | \hat{\mathcal{M}}_J(\kappa) | J_i \rangle] \left. \right\} \times \\ &\times \left\{ - \sum_{J' \geq 1} (-i)^{J'} \sqrt{2\pi(2J'+1)} \sum_{\lambda'=\pm 1} l_{\lambda'} (-1)^{J_f-M_f} \begin{pmatrix} J_f & J' & J_i \\ -M_f & -\lambda' & M_i \end{pmatrix} [\lambda \langle J_f | \hat{\mathcal{T}}_{J'}^{mag}(\kappa) | J_i \rangle + \langle J_f | \hat{\mathcal{T}}_{J'}^{el}(\kappa) | J_i \rangle] \right. \\ &+ \sum_{J' \geq 0} (-i)^{J'} \sqrt{4\pi(2J'+1)} (-1)^{J_f-M_f} \begin{pmatrix} J_f & J' & J_i \\ -M_f & 0 & M_i \end{pmatrix} [l_3 \langle J_f | \hat{\mathcal{L}}_{J'}(\kappa) | J_i \rangle - l_0 \langle J_f | \hat{\mathcal{M}}_{J'}(\kappa) | J_i \rangle] \left. \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Primjenjujemo relaciju ortogonalnosti 3j simbola [47]

$$\frac{1}{2J_i+1} \sum_{M_i} \sum_{M_i} \begin{pmatrix} J_f & J & J_i \\ -M_f & -\lambda & M_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_f & J' & J_i \\ -M_f & -\lambda' & M_i \end{pmatrix} = \frac{1}{(2J+1)(2J_i+1)} \delta_{JJ'} \delta_{\lambda\lambda'}, \quad (\text{A.22})$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2J_i+1} \sum_{M_i} \sum_{M_i} |\langle f | \hat{H}_W | i \rangle|^2 &= \frac{G^2}{2} \left\{ \sum_{J \geq 1} 2\pi(2J+1) \sum_{\lambda=\pm 1} l_\lambda l_\lambda^* \frac{1}{(2J+1)(2J_i+1)} [\langle J_f | \lambda \hat{\mathcal{T}}_J^{mag}(\kappa) + \hat{\mathcal{T}}_J^{el}(\kappa) | J_i \rangle] \right. \\ &+ \sum_{J \geq 0} 4\pi(2J+1) \frac{1}{(2J+1)(2J_i+1)} \left[ l_3 l_3^* |\langle J_f | \hat{\mathcal{L}}_J(\kappa) | J_i \rangle|^2 + l_0 l_0^* |\langle J_f | \hat{\mathcal{M}}_J(\kappa) | J_i \rangle|^2 \right. \\ &\left. \left. - 2\text{Re} \left( l_3 l_0^* \langle J_f | \hat{\mathcal{L}}_J(\kappa) | J_i \rangle \langle J_f | \hat{\mathcal{M}}_J(\kappa) | J_i \rangle^* \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Nadalje promotrimo sljedeći identitet

$$\begin{aligned}
\sum_{\lambda=\pm 1} l_{\lambda} l_{\lambda}^* |a + \lambda b|^2 &= l_{+1} l_{+1}^* |a + b|^2 + l_{-1} l_{-1}^* |a - b|^2 \\
&= (-) \frac{1}{\sqrt{2}} (l_1 + i l_2) (-) \frac{1}{\sqrt{2}} (l_1^* - i l_2^*) |a + b|^2 + \frac{1}{\sqrt{2}} (l_1 - i l_2) \frac{1}{\sqrt{2}} (l_1^* + i l_2^*) |a - b|^2 \\
&= \frac{1}{2} (l_1 l_1^* - i l_2 l_2^* + i l_1^* l_2 + l_2 l_2^*) |a + b|^2 + \frac{1}{2} (l_1 l_1^* + i l_1 l_2^* - i l_1^* l_2 + l_2 l_2^*) |a - b|^2 \\
&= \frac{1}{2} (l_1 l_1^* - i l_2 l_2^* + i l_1^* l_2 + l_2 l_2^*) (|a|^2 + |b|^2 - 2 \operatorname{Re}(ab^*)) \\
&\quad + \frac{1}{2} (l_1 l_1^* + i l_1 l_2^* - i l_1^* l_2 + l_2 l_2^*) (|a|^2 + |b|^2 + 2 \operatorname{Re}(ab^*)) \\
&= (|a|^2 + |b|^2) \frac{1}{2} (l_1 l_1^* - i l_1 l_2^* + i l_1^* l_2 + l_2 l_2^* + l_1 l_1^* + i l_1 l_2^* - i l_1^* l_2 + l_2 l_2^*) + \\
&\quad + \operatorname{Re}(ab^*) (l_1 l_1^* + i l_1 l_2^* - i l_1^* l_2 + l_2 l_2^* - l_1 l_1^* + i l_1 l_2^* - i l_1^* l_2 - l_2 l_2^*) \\
&= (|a|^2 + |b|^2) (l_1 l_1^* + l_2 l_2^*) + 2 \operatorname{Re}(ab^*) i (l_1 l_2^* - l_1^* l_2) \\
&= (|a|^2 + |b|^2) (\mathbf{l} \mathbf{l}^* - l_3 l_3^*) - 2i (\mathbf{l} \times \mathbf{l}^*)_3 2 \operatorname{Re}(ab^*).
\end{aligned} \tag{A.24}$$

Primjenom gornjeg identiteta na (A.23) dolazimo na

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2J_i + 1} \sum_{M_i} \sum_{M_f} |\langle f | \hat{H}_W | i \rangle|^2 &= \frac{G^2}{2} \frac{4\pi}{2J_i + 1} \times \\
&\times \left\{ \sum_{J \geq 1} \left[ \frac{1}{2} (\mathbf{l} \cdot \mathbf{l}^* - l_3 l_3^*) \left( |\langle J_f | \hat{\mathcal{T}}_J^{mag}(\kappa) | J_i \rangle|^2 + |\langle J_f | \hat{\mathcal{T}}_J^{el}(\kappa) | J_i \rangle|^2 \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{i}{2} (\mathbf{l} \times \mathbf{l}^*)_3 \left( 2 \operatorname{Re} \langle J_f | \hat{\mathcal{T}}_J^{mag}(\kappa) | J_i \rangle \langle J_f | \hat{\mathcal{T}}_J^{el}(\kappa) | J_i \rangle^* \right) \right] \right. \\
&\quad \left. + \sum_{J \geq 0} \left[ l_3 l_3^* |\langle J_f | \hat{\mathcal{L}}_J(\kappa) | J_i \rangle|^2 + l_0 l_0^* |\langle J_f | \hat{\mathcal{M}}_J(\kappa) | J_i \rangle|^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 2 \operatorname{Re} \left( l_3 l_0^* \langle J_f | \hat{\mathcal{L}}_J(\kappa) | J_i \rangle \langle J_f | \hat{\mathcal{M}}_J(\kappa) | J_i \rangle^* \right) \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{A.25}$$

### A.3 Leptonski tragovi

U ovom dodatku računamo sve leptonske tragove koji se pojavljuju u konačnom izrazu za udarni presjek (4.41).

$$\begin{aligned}
l_0 l_0^* &= \frac{\Omega^2}{2} \sum_{lept.spin.} \frac{1}{\Omega^2} \bar{u}(\nu) \gamma^0 (1 - \gamma_5) u(k) \bar{u}(k) \gamma^0 (1 - \gamma_5) u(\nu) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{lept.spin.} [\gamma^0 (1 - \gamma_5) u(k) \bar{u}(k) \gamma^0 (1 - \gamma_5) u(\nu) \bar{u}(\nu)] \\
&= \frac{1}{2} \text{Tr} \left[ \gamma^0 (1 - \gamma_5) \frac{\not{k} - m_e}{2\epsilon} \gamma^0 (1 - \gamma_5) \frac{\not{\nu}}{2\nu} \right] \\
&= \frac{1}{8} \frac{1}{\epsilon \nu} \text{Tr} [\gamma^0 (1 - \gamma_5) \not{k} \gamma^0 (1 - \gamma_5) \not{\nu}]
\end{aligned} \tag{A.26}$$

U trećem redu smo iskoristili sumu po leptonskim spinovima od produkta spinora koristeći normalizaciju kao kod [41]

$$\sum_{lept.spin.} u(k) \bar{u}(k) = \frac{\not{k} - m_e}{2\epsilon}. \tag{A.27}$$

Ovdje koristim notaciju da je  $\epsilon$  energija leptona (u ovom slučaju elektrona), a  $k$  je 4-impuls leptona,  $\nu$  je 4-impuls neutrina. Pogledajmo sada samo dio s tragom

$$\begin{aligned}
\text{Tr} [\gamma^0 (1 - \gamma_5) \not{k} \gamma^0 (1 - \gamma_5) \not{\nu}] &= k^\mu \nu^\lambda \text{Tr} [\gamma^0 (1 - \gamma_5) \gamma_\mu \gamma^0 (1 - \gamma_5) \gamma_\lambda] \\
&= k^\mu \nu^\lambda \text{Tr} [\gamma^0 (1 - \gamma_5) (1 - \gamma_5) \gamma_\mu \gamma^0 \gamma_\lambda] = 2k^\mu \nu^\lambda \text{Tr} [\gamma^0 (1 - \gamma_5) \gamma_\mu \gamma^0 \gamma_\lambda] \\
&= (\text{cikl.}) = 2k^\mu \nu^\lambda \text{Tr} [(1 - \gamma_5) \gamma_\mu \gamma^0 \gamma_\lambda \gamma^0] \\
&= 2k^\mu \nu^\lambda \{ 2\delta_0^\lambda \text{Tr} [(1 - \gamma_5) \gamma_\mu \gamma^0] - \text{Tr} [(1 - \gamma_5) \gamma_\mu \gamma_\lambda] \} \\
&= 2k^\mu \nu^\lambda \{ 8\delta_0^\lambda \delta_0^\mu - 4g_{\mu\lambda} \},
\end{aligned} \tag{A.28}$$

U drugom redu smo doveli  $(1 - \gamma_5)$  članove jedan do drugog i zatim smo iskoristili

$$(1 - \gamma_5)(1 - \gamma_5) = 2(1 - \gamma_5). \tag{A.29}$$

U trećem redu koristimo cikličko svojstvo traga, zatim pravila izvrijednjavanja tragova  $\gamma$  matrica, koja se mogu pronaći u standardnoj literaturi fizike čestica.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow l_0 l_0^* &= \frac{1}{8} \frac{1}{\epsilon \nu} 8k^\mu \nu^\lambda \{ 2\delta_0^\lambda \delta_0^\mu - g_{\mu\lambda} \} \\
&= \frac{1}{\epsilon \nu} (2\epsilon \nu - k \cdot \nu) = 1 + \beta \hat{\nu}.
\end{aligned} \tag{A.30}$$



Na kraju smo sa  $\boldsymbol{\beta}$  označili 3-brzinu elektrona kako bi bili u skladu s notacijom u (4.41).

$$\begin{aligned}
l_3 l_3^* &= \frac{\Omega^2}{2} \sum_{lept.spin.} \frac{1}{\Omega^2} \bar{u}(\nu) \gamma^3 (1 - \gamma_5) u(k) \bar{u}(k) \gamma^3 (1 - \gamma_5) u(\nu) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{lept.spin.} [\gamma^3 (1 - \gamma_5) u(k) \bar{u}(k) \gamma^3 (1 - \gamma_5) u(\nu) \bar{u}(\nu)] \\
&= \frac{1}{2} \text{Tr} \left[ \gamma^3 (1 - \gamma_5) \frac{\not{k} - m_e}{2\epsilon} \gamma^3 (1 - \gamma_5) \frac{\not{\nu}}{2\nu} \right] \\
&= \frac{1}{8} \frac{1}{\epsilon \nu} \text{Tr} [\gamma^3 (1 - \gamma_5) \not{k} \gamma^3 (1 - \gamma_5) \not{\nu}]
\end{aligned} \tag{A.31}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow 2 \text{Tr} [\gamma^3 (1 - \gamma_5) \not{k} \gamma^3 \not{\nu}] &= 2k^\mu \nu^\lambda \text{Tr} [\gamma^3 (1 - \gamma_5) \not{k} \gamma^3 \not{\nu}] = (\text{cikl.}) = 2k^\mu \nu^\lambda \text{Tr} [(1 - \gamma_5) \not{k} \gamma^3 \not{\nu} \gamma^3] \\
&= 2k^\mu \nu^\lambda \{ 2\delta_\lambda^3 \text{Tr} [(1 - \gamma_5) \gamma_\mu \gamma^3] + \text{Tr} [(1 - \gamma_5) \gamma_\mu \gamma_\lambda] \} = 2k^\mu \nu^\lambda \{ 8\delta_\lambda^3 \delta_\mu^3 + 4g_{\mu\lambda} \}
\end{aligned} \tag{A.32}$$

$$\Rightarrow l_3 l_3^* = \frac{1}{\epsilon \nu} (2k^3 \nu^3 + k \cdot \nu) = 1 - \hat{\nu} \cdot \boldsymbol{\beta} + 2(\hat{\nu} \cdot \hat{\boldsymbol{q}})(\boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\boldsymbol{q}}). \tag{A.33}$$

Zadnji red vrijedi zbog toga jer smo naš koordinatni sustav zarotirali tako da  $\hat{\boldsymbol{q}}$  pokazuje u z-smjeru.

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}^* &= \frac{\Omega^2}{2} \sum_{lept.spin.} \frac{1}{\Omega^2} \bar{u}(\nu) \gamma^i (1 - \gamma_5) u(k) \bar{u}(k) \gamma^i (1 - \gamma_5) u(\nu) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{lept.spin.} [\gamma^i (1 - \gamma_5) u(k) \bar{u}(k) \gamma^i (1 - \gamma_5) u(\nu) \bar{u}(\nu)] \\
&= \frac{1}{2} \frac{1}{4\epsilon \nu} \text{Tr} [\gamma^i (1 - \gamma_5) \not{k} \gamma^i (1 - \gamma_5) \not{\nu}] = \frac{1}{4\epsilon \nu} \text{Tr} [\gamma^i (1 - \gamma_5) \not{k} \gamma^i \not{\nu}] \\
&= \frac{1}{4\epsilon \nu} k^\mu \nu^\lambda \text{Tr} [\gamma^i (1 - \gamma_5) \gamma_\mu \gamma^i \gamma_\lambda].
\end{aligned} \tag{A.34}$$

Promotrimo trag zasebno

$$\text{Tr} [\gamma^i (1 - \gamma_5) \gamma_\mu \gamma^i \gamma_\lambda] = (\text{cikl.}) = \text{Tr} [(1 - \gamma_5) \gamma_\mu \gamma^i \gamma_\lambda \gamma^i] = \text{Tr} [(1 - \gamma_5) \gamma_\mu \gamma^i (2\delta_\lambda^i - \gamma^i \gamma_\lambda)], \tag{A.35}$$

dalje koristimo identitet

$$\gamma^i \gamma^i = -\gamma^i \gamma_i = 3\mathbb{1}_{4 \times 4}. \tag{A.36}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \text{Tr} [\gamma^i (1 - \gamma_5) \gamma_\mu \gamma^i \gamma_\lambda] &= 2\delta_\lambda^i \text{Tr} [(1 - \gamma_5) \gamma_\mu \gamma^i] + 3\text{Tr} [(1 - \gamma_5) \gamma_\mu \gamma_\lambda] \\
&= -2\delta_\lambda^i \text{Tr} [(1 - \gamma_5) \gamma_\mu \gamma_i] + 3\text{Tr} [(1 - \gamma_5) \gamma_\mu \gamma_\lambda] \\
&= 8\delta_\lambda^i \delta_\mu^i + 12g_{\mu\lambda}.
\end{aligned} \tag{A.37}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \boldsymbol{l}^* &= \frac{1}{4\epsilon\nu} k^\mu \nu^\lambda \left( 8\delta_\lambda^i \delta_\mu^i + 12g_{\mu\lambda} \right) = \frac{1}{\epsilon\nu} \left( 2k^i \nu^i + 3k \cdot \nu \right) \\
&= \frac{1}{\epsilon\nu} (2\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{\nu} + 3\epsilon\nu - 3\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{\nu}) = 3 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\boldsymbol{\nu}}.
\end{aligned} \tag{A.38}$$

Sada možemo izračunati

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{1}{2} (\boldsymbol{l}^* - l_3 l_3^*) &= \frac{1}{2} (3 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\boldsymbol{\nu}} - 1 + \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\boldsymbol{\nu}} - 2(\hat{\boldsymbol{\nu}} \cdot \hat{\boldsymbol{q}})(\boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\boldsymbol{q}})) \\
&= 1 - (\hat{\boldsymbol{\nu}} \cdot \hat{\boldsymbol{q}})(\boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\boldsymbol{q}}).
\end{aligned} \tag{A.39}$$

Nadalje, slijedi najkompliciraniji dio tragova

$$(\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{l}^*)_3 = l_1 l_2^* - l_1^* l_2. \tag{A.40}$$

Promotrimo svaki od dijelova zasebno

$$\begin{aligned}
l_1 l_2^* &= \frac{\Omega^2}{2} \sum_{lept.spin.} \frac{1}{\Omega^2} \bar{u}(\nu) \gamma_1 (1 - \gamma_5) u(k) \bar{u}(k) \gamma_2 (1 - \gamma_5) u(\nu) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{lept.spin.} [\gamma_1 (1 - \gamma_5) u(k) \bar{u}(k) \gamma_2 (1 - \gamma_5) u(\nu) \bar{u}(\nu)] \\
&= \frac{1}{2} \frac{1}{4\epsilon\nu} \text{Tr} [\gamma_1 (1 - \gamma_5) \not{k} \gamma_2 (1 - \gamma_5) \not{\nu}] \\
&= \frac{1}{2} \frac{k^\mu \nu^\lambda}{4\epsilon\nu} \text{Tr} [\gamma_1 (1 - \gamma_5) \gamma_\mu \gamma_2 (1 - \gamma_5) \gamma_\lambda]
\end{aligned} \tag{A.41}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \text{Tr} [\gamma_1 (1 - \gamma_5) \gamma_\mu \gamma_2 (1 - \gamma_5) \gamma_\lambda] &= 2\text{Tr} [\gamma_1 (1 - \gamma_5) \gamma_\mu \gamma_2 \gamma_\lambda] \\
&= (cikl.) = 2\text{Tr} [(1 - \gamma_5) \gamma_\mu \gamma_2 \gamma_\lambda \gamma_1] = 2\text{Tr} [(1 - \gamma_5) \gamma_\mu \gamma_2 (2\delta_\lambda^1 - \gamma_1 \gamma_\lambda)] \\
&= 2 \{ 2\delta_\lambda^1 \text{Tr} [(1 - \gamma_5) \gamma_\mu \gamma_2] - \text{Tr} [(1 - \gamma_5) \gamma_\mu \gamma_2 \gamma_1 \gamma_\lambda] \}.
\end{aligned} \tag{A.42}$$

Drugi dio je

$$\begin{aligned}
l_2 l_1^* &= \frac{\Omega^2}{2} \sum_{lept.spin.} \frac{1}{\Omega^2} \bar{u}(\nu) \gamma_2 (1 - \gamma_5) u(k) \bar{u}(k) \gamma_1 (1 - \gamma_5) u(\nu) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{lept.spin.} [\gamma_2 (1 - \gamma_5) u(k) \bar{u}(k) \gamma_1 (1 - \gamma_5) u(\nu) \bar{u}(\nu)] \\
&= \frac{1}{2} \frac{1}{4\epsilon\nu} \text{Tr} [\gamma_2 (1 - \gamma_5) \not{k} \gamma_1 (1 - \gamma_5) \not{\nu}] \\
&= \frac{1}{2} \frac{k^\mu \nu^\lambda}{4\epsilon\nu} \text{Tr} [\gamma_2 (1 - \gamma_5) \gamma_\mu \gamma_1 (1 - \gamma_5) \gamma_\lambda]
\end{aligned} \tag{A.43}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \text{Tr} [\gamma_2 (1 - \gamma_5) \gamma_\mu \gamma_1 (1 - \gamma_5) \gamma_\lambda] &= 2 \text{Tr} [\gamma_2 (1 - \gamma_5) \gamma_\mu \gamma_1 \gamma_\lambda] \\
&= (cikl.) = 2 \text{Tr} [(1 - \gamma_5) \gamma_\mu \gamma_1 \gamma_\lambda \gamma_2] = 2 \text{Tr} [(1 - \gamma_5) \gamma_\mu \gamma_1 (2\delta_\lambda^1 - \gamma_2 \gamma_\lambda)] \\
&= 2 \{ 2\delta_\lambda^1 \text{Tr} [(1 - \gamma_5) \gamma_\mu \gamma_1] - \text{Tr} [(1 - \gamma_5) \gamma_\mu \gamma_1 \gamma_2 \gamma_\lambda] \}.
\end{aligned} \tag{A.44}$$

Vrijedi

$$\text{Tr} [(1 - \gamma_5) \gamma_\mu \gamma_{1,2}] = 4\delta_{1,2}^\mu. \tag{A.45}$$

Zbrajanjem rezultata imamo

$$l_1 l_2^* - l_1^* l_2 = \frac{k^\mu \nu^\lambda}{4\epsilon\nu} \{ 8\delta_\lambda^1 \delta_\mu^2 - 8\delta_\lambda^2 \delta_\mu^1 + 2 \text{Tr} [(1 - \gamma_5) \gamma_\mu \gamma_1 \gamma_2 \gamma_\lambda] \}. \tag{A.46}$$

Detaljnije promotrimo preostali trag, uz konvenciju  $\epsilon^{0123} = -1$

$$\begin{aligned}
\text{Tr} [(1 - \gamma_5) \gamma_\mu \gamma_1 \gamma_2 \gamma_\lambda] &= \text{Tr} [\gamma_\mu \gamma_1 \gamma_2 \gamma_\lambda] - \text{Tr} [\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_1 \gamma_2 \gamma_\lambda] \\
&= 4(g_{\mu 1} g_{\lambda 2} - g_{\mu 2} g_{\lambda 1} + g_{\mu \lambda} g_{12}) + 4i\epsilon_{\mu 12\lambda} \\
&= 4\delta_1^\mu \delta_2^\lambda - 4\delta_2^\mu \delta_1^\lambda + 4i\epsilon_{\mu 12\lambda}.
\end{aligned} \tag{A.47}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow l_1 l_2^* - l_1^* l_2 &= \frac{k^\mu \nu^\lambda}{4\epsilon\nu} \{ \cancel{8\delta_\lambda^1 \delta_\mu^2} - \cancel{8\delta_\lambda^2 \delta_\mu^1} + \cancel{8\delta_\lambda^2 \delta_\mu^1} - \cancel{8\delta_\lambda^1 \delta_\mu^2} + 8i\epsilon_{\mu 12\lambda} \} \\
&= 2 \frac{k^\mu \nu^\lambda}{4\epsilon\nu} i\epsilon_{\mu 12\lambda} = \frac{2i}{\epsilon\nu} (-k^0 \nu^3 + k^3 \nu^0) \\
&= \frac{2i}{\epsilon\nu} (-\epsilon \nu^3 + k^3 \nu) = 2i \left( -\frac{\nu^3}{\nu} + \frac{k^3}{\epsilon} \right).
\end{aligned} \tag{A.48}$$

$$\Rightarrow -\frac{i}{2} (\mathbf{l} \times \mathbf{l})_3 = \left( -\frac{\nu^3}{\nu} + \frac{k^3}{\epsilon} \right) = -(\hat{\nu} - \boldsymbol{\beta}) \cdot \hat{\mathbf{q}}. \tag{A.49}$$

Još preostaje samo jedan trag za izračunati

$$\begin{aligned}
-l_3 l_0^* &= -\frac{\Omega^2}{2} \sum_{lept.spin.} \frac{1}{\Omega^2} \bar{u}(\nu) \gamma_3 (1 - \gamma_5) u(k) \bar{u}(k) \gamma_0 (1 - \gamma_5) u(\nu) \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{lept.spin.} [\gamma_3 (1 - \gamma_5) u(k) \bar{u}(k) \gamma_0 (1 - \gamma_5) u(\nu) \bar{u}(\nu)] \\
&= -\frac{1}{2} \frac{1}{4\epsilon\nu} \text{Tr} [\gamma_3 (1 - \gamma_5) \not{k} \gamma_0 (1 - \gamma_5) \not{\nu}] \\
&= -\frac{1}{2} \frac{k^\mu \nu^\lambda}{4\epsilon\nu} \text{Tr} [\gamma_3 (1 - \gamma_5) \gamma_\mu \gamma_0 (1 - \gamma_5) \gamma_\lambda]
\end{aligned} \tag{A.50}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \text{Tr} [\gamma_3 (1 - \gamma_5) \gamma_\mu \gamma_0 (1 - \gamma_5) \gamma_\lambda] &= 2 \text{Tr} [\gamma_3 (1 - \gamma_5) \gamma_\mu \gamma_0 \gamma_\lambda] \\
&= (cikl.) = 2 \text{Tr} [(1 - \gamma_5) \gamma_\mu \gamma_0 \gamma_\lambda \gamma_3] = 2 \text{Tr} [(1 - \gamma_5) \gamma_\mu \gamma_0 (2\delta_\lambda^3 - \gamma_3 \gamma_\lambda)] \\
&= 2 \{ 2\delta_\lambda^3 \text{Tr} [(1 - \gamma_5) \gamma_\mu \gamma_0] - \text{Tr} [(1 - \gamma_5) \gamma_\mu \gamma_0 \gamma_3 \gamma_\lambda] \} \\
&= 2 \{ 8\delta_\lambda^3 \delta_\mu^0 - 4(g_{\mu 0} g_{\lambda 3} - g_{\mu 3} g_{\lambda 0} + g_{\mu \lambda} g_{03}) - i4\epsilon_{\mu 03\lambda} \} \\
&= 2 \{ 8\delta_\lambda^3 \delta_\mu^0 - 4\delta_\mu^0 \delta_\lambda^3 + 4\delta_\mu^3 \delta_\lambda^0 - 4i\epsilon_{\mu 03\lambda} \} \\
&= 8 \{ \delta_\lambda^3 \delta_\mu^0 + \delta_\mu^3 \delta_\lambda^0 - i\epsilon_{\mu 03\lambda} \}.
\end{aligned} \tag{A.51}$$

Konačno slijedi

$$l_3 l_0^* = -\frac{1}{\epsilon\nu} (k^0 \nu^3 + k^3 \nu^0 - i(k^1 \nu^2 - k^2 \nu^1)), \tag{A.52}$$

no sada treba biti oprezan. Budući da smo z-os orijentirali u smjeru  $\mathbf{q}$ , a drugi član odgovara trećoj komponenti vektorskog produkta  $\mathbf{k} \times \mathbf{\nu}$ , nužno iščezava pa je konačan rezultat

$$l_3 l_0^* = -\hat{\mathbf{q}} \cdot (\boldsymbol{\beta} + \hat{\mathbf{\nu}}). \tag{A.53}$$

#### A.4 Nukleonski matrični elementi

Kinematika problema prikazana je na slici (4.1), te koristimo  $q \equiv p - p'$ . Iz argumenata simetrije, najopćenitija vektorska struja glasi [41]

$$\langle \mathbf{p}' \sigma' \rho' | \hat{J}_\mu^{(\pm)} | \mathbf{p} \sigma \rho \rangle = \frac{i}{\Omega} \bar{u}(\mathbf{p}' \sigma') [F_1 \gamma_\mu + F_2 \sigma_{\mu\nu} q_\nu] \tau_\pm \eta_\rho u(\mathbf{p} \sigma), \tag{A.54}$$

gdje  $\eta_\rho$  označava izospinske spinore,  $\sigma$  je indeks koji se odnosi na Paulijeve spinore, a  $\tau_\pm$  je operator podizanja i spuštanja izospina. U gornjem izrazu

- Nema sekundarnih struja  $F_S = F_T = 0$ ,

- Zbog sačuvanja vektorske struje (CVC)

$$F_i = F_i^V \quad ; i = 1, 2, \quad (\text{A.55})$$

gdje su  $F_i^V$  form-faktori kod elektromagnetskog raspršenja. Aksijalno-vektorska struja ima oblik

$$\langle \mathbf{p}' \sigma' \rho' | \hat{J}_{\mu 5}^{(\pm)} | \mathbf{p} \sigma \rho \rangle = \frac{i}{\Omega} \bar{u}(\mathbf{p}' \sigma') [F_A \gamma_5 \gamma_\mu - i F_P \gamma_5 q_\mu] \tau_\pm \eta_\rho u(\mathbf{p} \sigma), \quad (\text{A.56})$$

u gornjem rezultatu smo iskoristili

- Dominaciju pionskog-pola, opisanu u (4.2)

$$F_P = \frac{2mF_A}{q^2 + m_\pi^2}, \quad (\text{A.57})$$

- parcijalno sačuvanje aksijalno-vektorske struje

$$\langle f | \frac{\partial}{\partial x_\mu} J_{\mu 5}^{(\pm)} | i \rangle = O(m_\pi^2). \quad (\text{A.58})$$

Gornje pretpostavke možemo iskoristiti za gradnju operatora nuklearne struje. U drugoj kvantizaciji, gustoća nuklearne struje je dana u ishodištu kao

$$\hat{\mathcal{J}}_\mu(0) = \sum_{\mathbf{p}' \sigma' \rho'} \sum_{\mathbf{p} \sigma \rho} c_{\mathbf{p}' \sigma' \rho'}^\dagger \langle \mathbf{p}' \sigma' \rho' | \mathcal{J}_\mu(0) | \mathbf{p} \sigma \rho \rangle c_{\mathbf{p} \sigma \rho}. \quad (\text{A.59})$$

Operatori  $c_{\mathbf{p}' \sigma' \rho'}^\dagger$  i  $c_{\mathbf{p} \sigma \rho}$  su operatori stvaranja i poništenja u drugoj kvantizaciji. U prvoj kvantizaciji operator nuklearne struje možemo zapisati kao

$$\hat{\mathcal{J}}_\mu(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^A \left[ \hat{\mathcal{J}}_\mu^{(1)}(i) \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \right]. \quad (\text{A.60})$$

Ukoliko želimo prijeći iz druge kvantizacije u prvu, jednočestične matrične elemente nuklearne struje (A.59) moramo poistovijetiti s

$$\langle \mathbf{p}' \sigma' \rho' | \mathcal{J}_\mu(\mathbf{x}) | \mathbf{p} \sigma \rho \rangle = \int d^3 y \phi_{\mathbf{p}' \sigma' \rho'}^\dagger \left[ \hat{\mathcal{J}}_\mu^{(1)}(\mathbf{y}) \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right] \phi_{\mathbf{p} \sigma \rho}(\mathbf{y}). \quad (\text{A.61})$$

Sam izgled struja možemo pretpostaviti iz sličnog problema EM raspršenja [41, 44]

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{J}}^{(\pm)}(\mathbf{x}) &= \hat{\mathbf{J}}_C^{(\pm)}(\mathbf{x}) + \nabla \times \hat{\boldsymbol{\mu}}^{(\pm)}(\mathbf{x}), \\
\hat{\mathbf{J}}_5^{(\pm)}(\mathbf{x}) &= \hat{\mathbf{A}}^{(\pm)}(\mathbf{x}) + \nabla \hat{\phi}_{PS}^{(\pm)}(\mathbf{x}), \\
\hat{\mathbf{J}}_0^{(\pm)}(\mathbf{x}) &= \hat{\rho}^{(\pm)}(\mathbf{x}), \\
\hat{\mathbf{J}}_{05}^{(\pm)}(\mathbf{x}) &= \hat{\rho}_5^{(\pm)}(\mathbf{x}),
\end{aligned} \tag{A.62}$$

uz

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}^{(\pm)}(\mathbf{x}) = \frac{F_1 + 2mF_2}{2mF_A} \hat{\mathbf{A}}^{(\pm)}(\mathbf{x}). \tag{A.63}$$

U nastavku izvoda pretpostavljamo da je nuklearni operator struje suma doprinosa pojedinih nukleona. Za nuklearne prijelaze od interesa gibanje nukleona u meti se može tretirati nerelativistički pa spinor nukleona možemo zapisati kao [42]

$$u(\mathbf{p}, \lambda) \approx \begin{pmatrix} \chi_\lambda \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{2M} \chi_\lambda \end{pmatrix}, \tag{A.64}$$

gdje je  $\chi_\lambda$  dvokomponentni Paulijev spinor, a  $M$  masa nukleona. Prilikom izvoda se zadržavamo samo na članovima reda  $O(1/m)$ , uzimajući u obzir da su  $F_2$  i  $q_0$  već  $O(1/m)$ . Promotrimo prvo vektorski dio nuklearnog operatora struje (A.54) i to članove uz  $F_1$  i  $F_2$  zasebno

- član uz  $F_1$ :

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow F_1 \frac{i}{\Omega} \begin{pmatrix} \chi_{\lambda'}^\dagger & -\chi_{\lambda'}^\dagger \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}'}{2M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_\lambda \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{2M} \chi_\lambda \end{pmatrix} \\
&= F_1 \frac{i}{\Omega} \begin{pmatrix} \chi_{\lambda'}^\dagger & -\chi_{\lambda'}^\dagger \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}'}{2M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_\lambda \\ -\chi_\lambda \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{2M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\boldsymbol{\sigma} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{2M} \chi_\lambda \\ \boldsymbol{\sigma} \chi_\lambda \end{pmatrix} \\
&= F_1 \frac{i}{\Omega} \left( \chi_{\lambda'}^\dagger \chi_\lambda + \chi_{\lambda'}^\dagger \left( \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}'}{2M} \right) \left( \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{2M} \right) \chi_\lambda, \quad -\chi_{\lambda'}^\dagger \boldsymbol{\sigma} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{2M} \chi_\lambda - \chi_{\lambda'}^\dagger \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}'}{2M} \cdot \boldsymbol{\sigma} \chi_\lambda \right)
\end{aligned} \tag{A.65}$$

U nastavku zadržavamo samo članove  $O(1/m)$  što znači da nam član  $\chi_{\lambda'}^\dagger \left( \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}'}{2M} \right) \left( \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{2M} \right) \chi_\lambda$  propada pa preostaje

$$\stackrel{O(1/m)}{\Rightarrow} F_1 \frac{i}{\Omega} \chi_{\lambda'}^\dagger \left( \mathbb{1}, \quad -\boldsymbol{\sigma} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{2M} - \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}'}{2M} \cdot \boldsymbol{\sigma} \right) \chi_\lambda. \tag{A.66}$$

Za daljnje sređivanje iskoristimo identitet [56]

$$(\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma})(\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbb{1} + i(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \boldsymbol{\sigma}. \tag{A.67}$$

Na kraju imamo

$$\Rightarrow F_1 \frac{i}{\Omega} \chi_{\lambda'}^\dagger \left( \mathbb{1}, \frac{2\mathbf{p}-\mathbf{q}}{2M} - \frac{i\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{q}}{2M} \right) \chi_\lambda. \quad (\text{A.68})$$

- Član uz  $F_2$ :

$$\begin{aligned} \Rightarrow F_2 \frac{i}{\Omega} \left( \chi_{\lambda'}^\dagger \quad -\chi_{\lambda'}^\dagger \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}'}{2M} \right) \sigma_{\mu\nu} q_\nu \begin{pmatrix} \chi_\lambda \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{2M} \chi_\lambda \end{pmatrix} \\ = -F_2 \frac{1}{2\Omega} \left( \chi_{\lambda'}^\dagger \quad -\chi_{\lambda'}^\dagger \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}'}{2M} \right) (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu) q_\nu \begin{pmatrix} \chi_\lambda \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{2M} \chi_\lambda \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.69})$$

Promotrimo član uz  $\gamma_\mu \gamma_\nu q_\nu$ ,

$$\begin{aligned} \gamma_\mu \gamma_\nu q_\nu &= \left( \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -\boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \right)_\mu \left( \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -\boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \right)_\nu q_\nu \\ &= \left( \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 & -\boldsymbol{\sigma} \mathbf{q} \\ \boldsymbol{\sigma} \mathbf{q} & -q_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 & -\boldsymbol{\sigma} \mathbf{q} \\ \boldsymbol{\sigma} \mathbf{q} & -q_0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \left( \begin{pmatrix} q_0 & -\boldsymbol{\sigma} \mathbf{q} \\ -\boldsymbol{\sigma} \mathbf{q} & q_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{q}) & -q_0 \boldsymbol{\sigma} \\ -q_0 \boldsymbol{\sigma} & \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{q}) \end{pmatrix} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.70})$$

Samo drugi član nam daje konačan doprinos pa njega računamo

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left( \chi_{\lambda'}^\dagger \quad -\chi_{\lambda'}^\dagger \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}'}{2M} \right) \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{q}) & -q_0 \boldsymbol{\sigma} \\ -q_0 \boldsymbol{\sigma} & \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{q}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_\lambda \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{2M} \chi_\lambda \end{pmatrix} \\ = \left( \chi_{\lambda'}^\dagger \quad -\chi_{\lambda'}^\dagger \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}'}{2M} \right) \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{q}) \chi_\lambda - \boldsymbol{\sigma} q_0 \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{2M} \chi_\lambda \\ -\boldsymbol{\sigma} q_0 \chi_\lambda + \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{q}) \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{2M} \chi_\lambda \end{pmatrix} \\ = \left[ +\chi_{\lambda'}^\dagger \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{q}) \chi_\lambda - \chi_{\lambda'}^\dagger \boldsymbol{\sigma} q_0 \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{2M} \chi_\lambda + \chi_{\lambda'}^\dagger \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}'}{2M} \boldsymbol{\sigma} q_0 \chi_\lambda - \chi_{\lambda'}^\dagger \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}'}{2M} \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{q}) \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{2M} \chi_\lambda \right] \\ \stackrel{O(1/m)}{\approx} \chi_{\lambda'}^\dagger \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{q}) \chi_\lambda = +\chi_{\lambda'}^\dagger (\mathbf{q} + i(\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{q})) \chi_\lambda. \end{aligned} \quad (\text{A.71})$$

Za drugi član u komutatoru  $\gamma_\nu \gamma_\mu g_\nu$  dobijemo

$$-\chi_{\lambda'}^\dagger (\mathbf{q} - i(\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{q})) \chi_\lambda, \quad (\text{A.72})$$

pa se članovi uz  $\mathbf{q}$  pokrate i kao konačan rezultat za član uz  $F_2$  imamo

$$\Rightarrow -2F_2 \chi_{\lambda'}^\dagger \left( 0, \quad i(\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{q}) \right) \chi_\lambda. \quad (\text{A.73})$$

- Član uz  $F_A$ :

$$\begin{aligned}
\frac{i}{\Omega} \bar{u}(\mathbf{p}'\lambda') F_A \gamma_5 \gamma_\mu u(\mathbf{p}, \lambda) &= \frac{i}{\Omega} F_A \begin{pmatrix} \chi_{\lambda'}^\dagger & -\chi_{\lambda'}^\dagger \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}'}{2M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_\lambda \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{2M} \chi_\lambda \end{pmatrix} \\
&= \frac{i}{\Omega} F_A \begin{pmatrix} \chi_{\lambda'}^\dagger & -\chi_{\lambda'}^\dagger \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}'}{2M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & -\boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_\lambda \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{2M} \chi_\lambda \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{A.74}$$

Promotrimo vremenski i prostorni dio 4-vektora zasebno

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \begin{pmatrix} \chi_{\lambda'}^\dagger & -\chi_{\lambda'}^\dagger \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}'}{2M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_\lambda \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{2M} \chi_\lambda \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \chi_{\lambda'}^\dagger & -\chi_{\lambda'}^\dagger \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}'}{2M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{2M} \chi_\lambda \\ \chi_\lambda \end{pmatrix} \\
&= \chi_{\lambda'}^\dagger \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot (2\mathbf{p} - \mathbf{q})}{2M} \chi_\lambda.
\end{aligned} \tag{A.75}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \begin{pmatrix} \chi_{\lambda'}^\dagger & -\chi_{\lambda'}^\dagger \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}'}{2M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & -\boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_\lambda \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{2M} \chi_\lambda \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \chi_{\lambda'}^\dagger & -\chi_{\lambda'}^\dagger \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}'}{2M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} \chi_\lambda \\ -\boldsymbol{\sigma} \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{2M} \chi_\lambda \end{pmatrix} \\
&= \chi_{\lambda'}^\dagger \boldsymbol{\sigma} \chi_\lambda.
\end{aligned} \tag{A.76}$$

- Član uz  $F_P$ :

$$\begin{aligned}
\frac{i}{\Omega} \bar{u}(\mathbf{p}'\lambda') (-i F_P \gamma_5 q_\mu) u(\mathbf{p}, \lambda) &= \frac{1}{\Omega} F_P \begin{pmatrix} \chi_{\lambda'}^\dagger & -\chi_{\lambda'}^\dagger \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}'}{2M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} q_\mu \begin{pmatrix} \chi_\lambda \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{2M} \chi_\lambda \end{pmatrix} \\
&= \frac{q_\mu}{\Omega} F_P \begin{pmatrix} \chi_{\lambda'}^\dagger & -\chi_{\lambda'}^\dagger \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}'}{2M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{2M} \chi_\lambda \\ \chi_\lambda \end{pmatrix} \\
&= \frac{q_\mu}{\Omega} F_P \left[ \chi_{\lambda'}^\dagger \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{2M} \chi_\lambda - \chi_{\lambda'}^\dagger \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}'}{2M} \chi_\lambda \right] = \frac{q_\mu}{\Omega} F_P \chi_{\lambda'}^\dagger \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{2M} \chi_\lambda.
\end{aligned} \tag{A.77}$$

Kombinirajući gornje rezultate za matrični element operatora nuklearne struje u ishodi-



štu imamo<sup>1</sup>

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{p}' \lambda' \rho' | \mathcal{J}_\mu^{(\pm)}(0) | \mathbf{p} \lambda \rho \rangle &= \frac{1}{\Omega} \chi_{\lambda'}^\dagger \eta_{\rho'}^\dagger \left[ M_\mu - q_\mu \left( F_P \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{q}}{2m} \right) \right] \tau_\pm \eta_\rho \chi_\lambda + O(1/m^2), \\
M_\mu &\equiv (m_0, \mathbf{M}), \\
\mathbf{M} &= F_A \boldsymbol{\sigma} - (F_1 + 2mF_2) \frac{i\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{q}}{2m} + F_1 \left( \frac{2\mathbf{p} - \mathbf{q}}{2m} \right), \\
M_0 &= F_1 + \boldsymbol{\sigma} \cdot \left[ F_A \frac{2\mathbf{p} - \mathbf{q}}{2m} \right].
\end{aligned} \tag{A.78}$$

Važna pretpostavka za nastavak izvoda jest da je izvor struja lokaliziran, što je za konačne jezgre i ispunjeno, tako da površinski članovi iščezavaju kod površinskih integracija. Također budući da su svi važniji matrični elementi dani kao Fourierovi transformati običnih matričnih elemenata, možemo pisati

$$i\mathbf{q} \rightarrow \nabla. \tag{A.79}$$

Sada imamo sve potrebno da zapišemo operatore nuklearne struje u prvoj kvantizaciji, koristeći definicije (A.62) i (A.63) [41, 57]

$$\begin{aligned}
\hat{\rho}^{(\pm)}(\mathbf{x}) &= F_1 \sum_{j=1}^A \tau_\pm(j) \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j), \\
\hat{\mathbf{J}}_C^{(\pm)}(\mathbf{x}) &= F_1 \sum_{j=1}^A \tau_\pm(j) \left[ \frac{\mathbf{p}(j)}{m}, \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) \right]_{sym}, \\
\hat{\mathbf{A}}^{(\pm)}(\mathbf{x}) &= F_A \sum_{j=1}^A \boldsymbol{\sigma}(j) \tau_\pm(j) \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j), \\
\hat{\rho}_5^{(\pm)} &= F_A \sum_{j=1}^A \tau_\pm(j) \boldsymbol{\sigma}(j) \cdot \left[ \frac{\mathbf{p}(j)}{m}, \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) \right]_{sym}.
\end{aligned} \tag{A.80}$$

Zagrada  $[\cdot]_{sym}$  označava simetrizaciju, a  $\mathbf{p}(j) = -i\nabla$  impuls čestice. U nastavku izvoda pretpostavljamo da izospinsku ovisnost možemo izdvojiti

$$O^{(\pm)}(i) = O(i) \tau_\pm(i), \tag{A.81}$$

te uvodimo oznake

$$M_J^M(\mathbf{x}) \equiv j_J(\kappa x) Y_{JM}(\Omega_x), \quad M_{JL}^M(\mathbf{x}) \equiv j_L(\kappa x) \mathcal{Y}_{JL1}^M(\Omega_x). \tag{A.82}$$

---

<sup>1</sup>Izospinski dio smo samo nadodali, tj. izospinske 2-spinore  $\eta_\rho$

Potrebni su nam i sljedeći izrazi [41, 47]

$$\nabla \times [j_J(x) \mathbf{y}_{JJ1}^M] = -i \left( \frac{J}{2J+1} \right)^{1/2} j_{J+1}(x) \mathbf{y}_{JJ+1}^M + i \left( \frac{J+1}{2J+1} \right)^{1/2} j_{J-1}(x) \mathbf{y}_{JJ-1}^M, \quad (\text{A.83})$$

$$\nabla j_J(x) Y_{JM} = \left( \frac{J+1}{2J+1} \right)^{1/2} j_{J+1}(x) \mathbf{y}_{JJ+1}^M + \left( \frac{J}{2J+1} \right)^{1/2} j_{J-1}(x) \mathbf{y}_{JJ-1}^M. \quad (\text{A.84})$$

$$(\text{A.85})$$

Sada uvrstimo gustoće struja (A.80) u izraze za multipolne operatore (4.32) - (4.35).

Operatore smo razdvojili na vektorski i aksijalno-vektorski dio, pa računamo redom

$$\begin{aligned} \hat{M}_{JM} &= \int dx [j_J(\kappa x) Y_{JM}(\Omega_x)] \hat{J}_0(x) = \int dx [j_J(\kappa x) Y_{JM}(\Omega_x)] \hat{\rho}(x) = \int dx M_J^M(\mathbf{x}) F_1 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \\ &= F_1 M_J^M(\mathbf{x}_i). \end{aligned} \quad (\text{A.86})$$

$$\begin{aligned} \hat{M}_{JM}^5 &= \int dx [j_J(\kappa x) Y_{JM}(\Omega_x)] F_A \boldsymbol{\sigma}(i) \cdot \left[ \frac{\mathbf{p}(j)}{m}, \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \right]_{sym} \\ &= \int dx [j_J(\kappa x) Y_{JM}(\Omega_x)] F_A \boldsymbol{\sigma}(i) \cdot \frac{1}{2} \left\{ \frac{-i \nabla(i)}{M} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) + \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \frac{-i \nabla(i)}{M} \right\} \\ &= \frac{-i}{M} M_J^M(\mathbf{x}_i) F_A \boldsymbol{\sigma}(i) \cdot \nabla(i) - \frac{i}{2M} F_A \int dx [j_J(\kappa x) Y_{JM}(\Omega_x)] \boldsymbol{\sigma}(i) \cdot \nabla(i) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i). \end{aligned} \quad (\text{A.87})$$

Pogledajmo drugi integral

$$\begin{aligned} \frac{-i}{2M} F_A \int dx [j_J(\kappa x) Y_{JM}(\Omega_x)] \boldsymbol{\sigma}(i) \cdot \nabla(i) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) &= -\frac{i}{2M} F_A \int dx \nabla(i) [j_J(\kappa x) Y_{JM}(\Omega_x)] \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \boldsymbol{\sigma}(i) \\ &= -\frac{1}{2} \frac{i}{M} F_A \nabla(i) M_J^M(\mathbf{x}_i) \boldsymbol{\sigma}(i) \stackrel{(\text{A.85})}{=} -\frac{i}{2M} F_A \kappa \left[ \left( \frac{J+1}{2J+1} \right)^{1/2} \mathcal{M}_{JJ+1}^M(\mathbf{x}_i) + \left( \frac{J}{2J+1} \right)^{1/2} \mathcal{M}_{JJ-1}^M(\mathbf{x}_i) \right] \boldsymbol{\sigma}(i). \end{aligned} \quad (\text{A.88})$$

Konačno imamo

$$\hat{M}_{JM}^5 = \frac{-i}{2M} M_J^M(\mathbf{x}_i) F_A \boldsymbol{\sigma}(i) \cdot \nabla(i) - \frac{i}{2M} F_A \kappa \left[ \left( \frac{J+1}{2J+1} \right)^{1/2} \mathcal{M}_{JJ+1}^M(\mathbf{x}_i) + \left( \frac{J}{2J+1} \right)^{1/2} \mathcal{M}_{JJ-1}^M(\mathbf{x}_i) \right] \boldsymbol{\sigma}(i). \quad (\text{A.89})$$

Vektorski dio operatora (4.33) ne moramo računati, već iskoristimo činjenicu da imamo sačuvanje vektorske struje (CVC). To znači da jednadžbu (4.33) možemo parcijalno integrirati te iskoristiti jednadžbu kontinuiteta

$$\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}) = -\frac{\partial J_0}{\partial t}, \quad (\text{A.90})$$

kako bi došli do izraza [41]

$$\langle J_f || \hat{L}_J || J_i \rangle = \frac{q_0}{|\mathbf{q}|} \langle J_f || \hat{M}_J || J_i \rangle. \quad (\text{A.91})$$

Koristeći gornji identitet trivijalno dobivamo<sup>1</sup>

$$\hat{L}_{JM} = \frac{q_0}{\kappa} F_1 M_J^M(\mathbf{x}_i). \quad (\text{A.92})$$

Aksijalni dio je pak potrebno izračunati

$$\begin{aligned} \hat{L}_{JM}^5 &= \frac{i}{\kappa} \int dx \nabla [j_J(\kappa x) Y_{JM}(\Omega_x)] \hat{J}_5(\mathbf{x}) = \frac{i}{\kappa} \int dx \nabla M_J^M(\mathbf{x}) F_A \sigma(i) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \\ &= \frac{i}{\kappa} F_A \nabla M_J^M(\mathbf{x}_i) \sigma(i) \stackrel{(\text{A.85})}{=} i F_A \left[ \left( \frac{J+1}{2J+1} \right)^{1/2} \mathcal{M}_{JJ+1}^M(\mathbf{x}_i) + \left( \frac{J}{2J+1} \right)^{1/2} \mathcal{M}_{JJ-1}^M(\mathbf{x}_i) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.93})$$

Vektorski dio transversalnog električnog operatora

$$\begin{aligned} \hat{T}_{JM}^{el} &= \frac{1}{\kappa} \int dx \nabla \times \mathcal{M}_{JJ}^M(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{J}}(\mathbf{x}) = \frac{i}{\kappa} \int dx \nabla \times \mathcal{M}_{JJ}^M(\mathbf{x}) [\hat{\mathbf{J}}_C(\mathbf{x}) + \nabla \times \hat{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{x})] \\ &= \frac{1}{\kappa} \int dx \nabla \times \mathcal{M}_{JJ}^M(\mathbf{x}) \left[ F_1 \left[ \frac{\mathbf{p}(j)}{m}, \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \right]_{\text{sym}} + \frac{F_1 + 2MF_2}{2M} \nabla \times (\sigma(i) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.94})$$

(A.95)

Računamo prvi član u zagradi

$$\begin{aligned} &\frac{F_1}{2\kappa M} \int dx \nabla \times \mathcal{M}_{JJ}^M(\mathbf{x}) (-i \nabla(i) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) + \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) (-i) \nabla(i)) \\ &= \frac{-iF_1}{2\kappa M} \int dx \nabla \times \mathcal{M}_{JJ}^M(\mathbf{x}) \nabla(i) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) + \frac{(-i)F_1}{2\kappa M} \int dx \nabla \times \mathcal{M}_{JJ}^M(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \nabla(i) \\ &= \frac{-iF_1}{2\kappa M} \int dx \nabla \times \mathcal{M}_{JJ}^M(\mathbf{x}) \nabla(i) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) - \frac{iF_1}{\kappa M} \nabla \times \mathcal{M}_{JJ}^M(\mathbf{x}_i) \nabla(i) \\ &\stackrel{(\text{A.84})}{=} \frac{F_1}{M} \left[ - \left( \frac{J}{2J+1} \right)^{1/2} \mathcal{M}_{JJ+1}^M(\mathbf{x}_i) + \left( \frac{J+1}{2J+1} \right)^{1/2} \mathcal{M}_{JJ-1}^M(\mathbf{x}_i) \right] \nabla(i). \end{aligned} \quad (\text{A.96})$$

Prekriženi član iščezava budući da se u njemu pojavljuje divergencija rotacije. Drugi

---

<sup>1</sup>sjetimo se da koristimo  $\kappa = |\mathbf{q}|$

član je

$$\begin{aligned}
& \frac{F_1 + 2MF_2}{2M} \frac{1}{\kappa} \int dx \nabla \times \mathcal{M}_{JJ}^M(\mathbf{x}) \nabla \times (\boldsymbol{\sigma}(i) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)) \\
& = + \frac{F_1 + 2MF_2}{2M} \frac{1}{\kappa} \int dx \nabla \times [\nabla \times \mathcal{M}_{JJ}^M(\mathbf{x})] \boldsymbol{\sigma}(i) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \\
& = - \frac{F_1 + 2MF_2}{2M} \frac{1}{\kappa} \nabla^2 \mathcal{M}_{JJ}^M(\mathbf{x}_i) \boldsymbol{\sigma}(i) = \frac{F_1 + 2MF_2}{2M} \kappa \mathcal{M}_{JJ}^M(\mathbf{x}_i) \boldsymbol{\sigma}(i).
\end{aligned} \tag{A.97}$$

U predzadnjem retku smo iskoristili identitet  $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{V}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{V}) = \nabla^2 \mathbf{V}$ , a u zadnjem  $\nabla^2 \mathcal{M}_{JJ}^M(\mathbf{x}_i) = -\kappa^2 \mathcal{M}_{JJ}^M(\mathbf{x}_i)$ . Konačno, vektorski dio transverzalnog električnog operatora je

$$\hat{T}_{JM}^{el} = \frac{F_1}{M} \left[ - \left( \frac{J}{2J+1} \right)^{1/2} \mathcal{M}_{JJ+1}^M(\mathbf{x}_i) + \left( \frac{J+1}{2J+1} \right)^{1/2} \mathcal{M}_{JJ-1}^M(\mathbf{x}_i) \right] \nabla(i) + \frac{F_1 + 2MF_2}{2M} \kappa \mathcal{M}_{JJ}^M(\mathbf{x}_i) \boldsymbol{\sigma}(i). \tag{A.98}$$

Aksijalno-vektorski dio je

$$\begin{aligned}
\hat{T}_{JM}^{el5} & = \frac{1}{\kappa} \int dx \nabla \times \mathcal{M}_{JJ}^M(\mathbf{x}) \hat{J}^5(\mathbf{x}) = \frac{1}{\kappa} \int dx \nabla \times \mathcal{M}_{JJ}^M(\mathbf{x}) F_A \boldsymbol{\sigma}(i) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \\
& = \frac{1}{\kappa} F_A \nabla \times \mathcal{M}_{JJ}^M(\mathbf{x}) = -iF_A \left[ \left( \frac{J}{2J+1} \right)^{1/2} \mathcal{M}_{JJ+1}^M(\mathbf{x}_i) - \left( \frac{J+1}{2J+1} \right)^{1/2} \mathcal{M}_{JJ-1}^M(\mathbf{x}_i) \right] \boldsymbol{\sigma}(i).
\end{aligned} \tag{A.99}$$

Vektorski dio transverzalnog magnetskog operatora slijedi,

$$\begin{aligned}
\hat{T}_{JM}^{mag} & = \int dx \mathcal{M}_{JJ}^M(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{J}}(\mathbf{x}) = \int dx \mathcal{M}_{JJ}^M(\mathbf{x}) [\hat{\mathbf{J}}_C(\mathbf{x}) + \nabla \times \hat{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{x})] \\
& = \int dx \mathcal{M}_{JJ}^M(\mathbf{x}) \left[ F_1 \left[ \frac{\mathbf{p}(j)}{m}, \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \right]_{sym} + \frac{F_1 + 2MF_2}{2M} \nabla \times (\boldsymbol{\sigma}(i) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)) \right].
\end{aligned} \tag{A.100}$$

Prvi član u zagradi

$$\begin{aligned}
& \frac{F_1}{2M} \int dx \mathcal{M}_{JJ}^M(\mathbf{x}) (-i \nabla(i) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) + \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) (-i) \nabla(i)) \\
& = \frac{-iF_1}{2M} \int dx \mathcal{M}_{JJ}^M(\mathbf{x}) \nabla(i) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) + \frac{-iF_1}{2M} \int dx \mathcal{M}_{JJ}^M(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \nabla(i) \\
& = -\frac{iF_1}{M} \mathcal{M}_{JJ}^M(\mathbf{x}) \cdot \nabla(i).
\end{aligned} \tag{A.101}$$

Drugi član

$$\begin{aligned}
& \frac{F_1 + 2MF_2}{2M} \int dx \mathcal{M}_{JJ}^M(\mathbf{x}) \nabla \times (\boldsymbol{\sigma}(i) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)) = \frac{F_1 + 2MF_2}{2M} \int \nabla \times \mathcal{M}_{JJ}^M(\mathbf{x}) \boldsymbol{\sigma}(i) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \\
& = \frac{F_1 + 2MF_2}{2M} \kappa \left[ -i \left( \frac{J}{2J+1} \right)^{1/2} \mathcal{M}_{JJ+1}^M(\mathbf{x}_i) + i \left( \frac{J+1}{2J+1} \right)^{1/2} \mathcal{M}_{JJ-1}^M(\mathbf{x}_i) \right] \cdot \boldsymbol{\sigma}(i).
\end{aligned} \tag{A.102}$$

Sve zajedno zapisano za transverzalni magnetski operator

$$\hat{T}_{JM}^{mag} = -\frac{iF_1}{M} \mathcal{M}_{JJ}^M(\mathbf{x}) \cdot \nabla(i) + \frac{F_1 + 2MF_2}{2M} \kappa \left[ -i \left( \frac{J}{2J+1} \right)^{1/2} \mathcal{M}_{JJ+1}^M(\mathbf{x}_i) + i \left( \frac{J+1}{2J+1} \right)^{1/2} \mathcal{M}_{JJ-1}^M(\mathbf{x}_i) \right] \cdot \boldsymbol{\sigma}(i). \quad (\text{A.103})$$

Aksijalni dio glasi

$$\hat{T}_{JM}^{mag5} = \int d\mathbf{x} \mathcal{M}_{JJ}^M(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{J}}_5(\mathbf{x}) = \int d\mathbf{x} \mathcal{M}_{JJ}^M(\mathbf{x}) F_A \boldsymbol{\sigma}(i) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) = F_A \mathcal{M}_{JJ}^M(\mathbf{x}_i) \boldsymbol{\sigma}(i). \quad (\text{A.104})$$

Sada imamo sve operatore potrebne za izračun reduciranih matričnih elemenata u izrazu (4.41) za udarni presjek uhvata elektrona. Matrični elementi koji su korišteni u kodu se mogu pronaći u standardnoj literaturi kao [42, 45, 58].

## Dodatak B Izvod rezidualne interakcije i matričnih elemenata za DD-ME interakciju

### B.1 Izvod rezidualne interakcije

Prije nego započnemo izvod, potrebna su nam dva važna identiteta koji će se ponavljati kroz izvod rezidualne interakcije. Za matricu gustoće  $\hat{\rho}(\mathbf{r}, t)$  imamo

$$\hat{\rho}(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=1}^A |\psi(\mathbf{r}, t)\rangle \langle \psi(\mathbf{r}, t)|, \quad (\text{B.105})$$

odnosno ako raspišemo

$$\hat{\rho}(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=1}^A \begin{pmatrix} f(\mathbf{r}, t) \\ ig(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f^\dagger(\mathbf{r}, t) & -ig^\dagger(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^A \begin{pmatrix} f(\mathbf{r}, t)f^\dagger(\mathbf{r}, t) & -if(\mathbf{r}, t)g^\dagger(\mathbf{r}, t) \\ if^\dagger(\mathbf{r}, t)g(\mathbf{r}, t) & g(\mathbf{r}, t)g^\dagger(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix}. \quad (\text{B.106})$$

Vrijedi [59]

$$\frac{\partial \text{Tr}[\gamma^0 \hat{\rho}(\mathbf{r})]}{\partial \hat{\rho}(\mathbf{r}')} = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \gamma^0. \quad (\text{B.107})$$

Također, sve konstante vezanja su nam funkcija vektorske gustoće  $\rho_v$  stoga promotrimo

$$\frac{\delta f[\rho_v(\mathbf{r})]}{\delta \hat{\rho}(\mathbf{r}')} = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \frac{\delta f[\rho_v(\mathbf{r}')] }{\delta \rho_v(\mathbf{r}')} \frac{\delta \rho_v(\mathbf{r}')}{\delta \hat{\rho}(\mathbf{r}')}, \quad (\text{B.108})$$

a lagano se pokazuje

$$\frac{\delta \rho_v(\mathbf{r}')}{\delta \hat{\rho}(\mathbf{r}')} = \mathbb{1}_{2 \times 2}. \quad (\text{B.109})$$

#### B.1.1 $\sigma$ -mezon

Lagrangijan interakcije za  $\sigma$ -mezon glasi

$$\mathcal{L}_\sigma = -g_\sigma \bar{\psi} \sigma \psi = g_\sigma \bar{\psi} \int g_\sigma(\rho_v(\mathbf{r}')) D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho_s(\mathbf{r}') d^3 r'. \quad (\text{B.110})$$

Energijski funkcional gustoće glasi

$$E_\sigma = \langle \Phi | \mathcal{L}_\sigma | \Phi \rangle = -\frac{1}{2} \int d^3 r_1 \int d^3 r_2 \text{Tr}[\gamma^{0(1)} \rho(\mathbf{r}_1)] g_\sigma(\rho_v(\mathbf{r}_1)) g_\sigma(\rho_v(\mathbf{r}_2)) D_\sigma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \text{Tr}[\gamma^{0(2)} \rho(\mathbf{r}_2)]. \quad (\text{B.111})$$

Vlastita energija je dana kao derivacija po matrici gustoće, te ćemo ju rastaviti na tri dijela

$$\Sigma_\sigma = \frac{\delta E_\sigma}{\delta \rho(\mathbf{r})} = I + II + III, \quad (\text{B.112})$$

$$\begin{aligned}
I &= -\frac{1}{2}\gamma^{0(1)}g_\sigma(\rho_v(\mathbf{r}))\int d^3r_2g_\sigma(\rho_v(\mathbf{r}_2))D_\sigma(\mathbf{r},\mathbf{r}_2)\text{Tr}[\gamma^{0(2)}\rho(\mathbf{r}_2)], \\
II &= -g'_\sigma(\rho_v(\mathbf{r}))\text{Tr}[\gamma^{0(1)}\rho(\mathbf{r})]\int d^3r_2g_\sigma(\rho_v(\mathbf{r}_2))D_\sigma(\mathbf{r},\mathbf{r}_2)\text{Tr}[\gamma^{0(2)}\rho(\mathbf{r}_2)], \\
III &= -\frac{1}{2}\gamma^{0(2)}g_\sigma(\rho_v(\mathbf{r}))\int d^3r_1\text{Tr}[\gamma^{0(1)}\rho(\mathbf{r}_1)]g_\sigma(\rho_v(\mathbf{r}_1))D_\sigma(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}).
\end{aligned} \tag{B.113}$$

Derivacija (B.113) daje rezidualnu interakciju pa pišemo

$$\begin{aligned}
\frac{\delta I}{\delta\rho(\mathbf{r}')} &= -\frac{1}{2}\gamma^{0(1)}g'_\sigma(\rho_v(\mathbf{r}))\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\int d^3r_2g_\sigma(\rho_v(\mathbf{r}_2))D_\sigma(\mathbf{r},\mathbf{r}_2)\text{Tr}[\gamma^{0(2)}\rho(\mathbf{r}_2)] \\
&\quad -\frac{1}{2}\gamma^{0(1)}g_\sigma(\rho_v(\mathbf{r}))g'_\sigma(\rho_v(\mathbf{r}'))D_\sigma(\mathbf{r},\mathbf{r}')\text{Tr}[\gamma^{0(2)}\rho(\mathbf{r}')] \\
&\quad -\frac{1}{2}\gamma^{0(1)}\gamma^{0(2)}g_\sigma(\rho_v(\mathbf{r}))g_\sigma(\rho_v(\mathbf{r}'))D_\sigma(\mathbf{r},\mathbf{r}').
\end{aligned} \tag{B.114}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\delta II}{\delta\rho(\mathbf{r}')} &= -\frac{1}{2}g''_\sigma(\rho_v(\mathbf{r}))\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\text{Tr}[\gamma^{0(1)}\rho(\mathbf{r})]\int d^3r_2g_\sigma(\rho_v(\mathbf{r}_2))D_\sigma(\mathbf{r},\mathbf{r}_2)\text{Tr}[\gamma^{0(2)}\rho(\mathbf{r}_2)] \\
&\quad -\frac{1}{2}g'_\sigma(\rho_v(\mathbf{r}))\gamma^{0(1)}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\int d^3r_2g_\sigma(\rho_v(\mathbf{r}_2))D_\sigma(\mathbf{r},\mathbf{r}_2)\text{Tr}[\gamma^{0(2)}\rho(\mathbf{r}_2)] \\
&\quad -\frac{1}{2}g'_\sigma(\rho_v(\mathbf{r}))\text{Tr}[\gamma^{0(1)}\rho(\mathbf{r})]g'_\sigma(\rho_v(\mathbf{r}'))D_\sigma(\mathbf{r},\mathbf{r}')\text{Tr}[\gamma^{0(2)}\rho(\mathbf{r}')] \\
&\quad -\frac{1}{2}g'_\sigma(\rho_v(\mathbf{r}))\text{Tr}[\gamma^{0(1)}\rho(\mathbf{r})]\gamma^{0(2)}g_\sigma(\rho_v(\mathbf{r}'))D_\sigma(\mathbf{r},\mathbf{r}').
\end{aligned} \tag{B.115}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\delta III}{\delta\rho(\mathbf{r}')} &= -\frac{1}{2}\gamma^{0(2)}g'_\sigma(\rho_v(\mathbf{r}))\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\int d^3r_1\text{Tr}[\gamma^{0(1)}\rho(\mathbf{r}_1)]g_\sigma(\rho_v(\mathbf{r}_1))D_\sigma(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}) \\
&\quad -\frac{1}{2}\gamma^{0(2)}\gamma^{0(1)}g_\sigma(\rho_v(\mathbf{r}))g_\sigma(\rho_v(\mathbf{r}'))D_\sigma(\mathbf{r}',\mathbf{r}) \\
&\quad -\frac{1}{2}\gamma^{0(2)}g_\sigma(\rho_v(\mathbf{r}))g'_\sigma(\rho_v(\mathbf{r}'))\text{Tr}[\gamma^{0(1)}\rho(\mathbf{r}')]D_\sigma(\mathbf{r}',\mathbf{r}).
\end{aligned} \tag{B.116}$$

Kombiniranjem gornjih članova konačno imamo

$$\begin{aligned}
\frac{\delta^2 E}{\delta\rho(\mathbf{r})\delta\rho(\mathbf{r}')} &= -\gamma^{0(1)}\gamma^{0(2)}g_\sigma(\rho_v(\mathbf{r}))g_\sigma(\rho_v(\mathbf{r}'))D_\sigma(\mathbf{r},\mathbf{r}') \\
&\quad -\left[\gamma^{0(2)}\mathbb{1}^{(1)}g_\sigma(\rho_v(\mathbf{r}))g'_\sigma(\rho_v(\mathbf{r}'))\rho_s(\mathbf{r}')+\mathbb{1}^{(1)}\mathbb{1}^{(2)}g'_\sigma(\rho_v(\mathbf{r}))g'_\sigma(\rho_v(\mathbf{r}'))\rho_s(\mathbf{r})\rho_s(\mathbf{r}')\right. \\
&\quad \left.+ \mathbb{1}^{(1)}\gamma^{0(2)}g'_\sigma(\rho_v(\mathbf{r}))g_\sigma(\rho_v(\mathbf{r}'))\rho_s(\mathbf{r})\right]D_\sigma(\mathbf{r},\mathbf{r}') \\
&\quad -\left[\gamma^{0(1)}\mathbb{1}^{(2)}g'_\sigma(\rho_v(\mathbf{r}))+\mathbb{1}^{(1)}\mathbb{1}^{(2)}\rho_s(\mathbf{r})g''_\sigma(\rho_v(\mathbf{r}))+\mathbb{1}^{(1)}\gamma^{0(2)}g'_\sigma(\rho_v(\mathbf{r}))\right]\frac{I_\sigma(r)}{r}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}').
\end{aligned} \tag{B.117}$$

U gornjem izrazu smo koristili pokratu

$$I_\sigma(r) = \int r'g_\sigma(\rho_v(r'))D_\sigma^0(r,r')\rho_s(r')dr', \tag{B.118}$$

pri čemu smo propagator  $D_\sigma(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  rastavili po multipolima

$$D_\sigma(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{rr'} \sum_{\lambda\mu} D_\sigma^\lambda(\mathbf{r}, \mathbf{r}') Y_{\lambda\mu}(\Omega) Y_{\lambda\mu}^*(\Omega'). \quad (\text{B.119})$$

### B.1.2 $\omega$ -mezon

Interakcija  $\omega$ -mezona glasi

$$\mathcal{L}_\omega = -g_\omega \bar{\psi} \gamma^\mu \omega_\mu \psi = -g_\omega \bar{\psi} \left( \gamma^\mu \int g_\omega(\rho_v) D_\omega(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) j_\mu(\mathbf{r}_2) d^3 r_2 \right) \psi. \quad (\text{B.120})$$

Energijski funkcional gustoće je

$$\begin{aligned} E_\omega &= \langle \Phi | \mathcal{L}_\omega | \Phi \rangle = \frac{1}{2} \int d^3 r_1 g_\omega(\rho_v(\mathbf{r}_1)) j^\mu(\mathbf{r}_1) \int d^3 r_2 g_\omega(\rho_v(\mathbf{r}_2)) D_\omega(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) j_\mu(\mathbf{r}_2) \\ &= \frac{1}{2} \int d^3 r_1 \int d^3 r_2 \text{Tr}[(\gamma^0 \gamma^\mu)^{(1)} \rho(\mathbf{r}_1)] g_\omega(\rho_v(\mathbf{r}_1)) g_\omega(\rho_v(\mathbf{r}_2)) D_\omega(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \text{Tr}[(\gamma^0 \gamma_\mu)^{(2)} \rho(\mathbf{r}_2)]. \end{aligned} \quad (\text{B.121})$$

Vlastita energija  $\omega$ -mezona je dana kao derivacija funkcionala gustoće

$$\Sigma_\omega = \frac{\delta E_\omega}{\delta \rho(\mathbf{r})} = I + II + III, \quad (\text{B.122})$$

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} (\gamma^0 \gamma^\mu)^{(1)} g_\omega(\rho_v(\mathbf{r})) \int d^3 r_2 g_\omega(\rho_v(\mathbf{r}_2)) D_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2) \text{Tr}[(\gamma^0 \gamma_\mu)^{(2)} \rho(\mathbf{r}_2)], \\ II &= \text{Tr}[(\gamma^0 \gamma^\mu)^{(1)} \rho(\mathbf{r})] g'_\omega(\rho_v(\mathbf{r})) \int d^3 r_2 g_\omega(\rho_v(\mathbf{r}_2)) D_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2) \text{Tr}[(\gamma^0 \gamma_\mu)^{(2)} \rho(\mathbf{r}_2)], \\ III &= \frac{1}{2} (\gamma^0 \gamma_\mu)^{(2)} g_\omega(\rho_v(\mathbf{r})) \int d^3 r_1 \text{Tr}[(\gamma^0 \gamma^\mu)^{(1)} \rho(\mathbf{r}_1)] g_\omega(\rho_v(\mathbf{r}_1)) D_\omega(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}). \end{aligned} \quad (\text{B.123})$$

Derivacija vlastite energije  $\Sigma_\omega$  daje rezidualnu interakciju, promotrimo svaki od članova u (B.123)

$$\begin{aligned} \frac{\delta I}{\delta \rho(\mathbf{r}')} &= \frac{1}{2} (\gamma^0 \gamma^\mu)^{(1)} g'_\omega(\rho_v(\mathbf{r})) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \int d^3 r_2 g_\omega(\rho_v(\mathbf{r}_2)) D_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2) \text{Tr}[(\gamma^0 \gamma_\mu)^{(2)} \rho(\mathbf{r}_2)] \\ &\quad + \frac{1}{2} (\gamma^0 \gamma^\mu)^{(1)} g_\omega(\rho_v(\mathbf{r})) \text{Tr}[(\gamma^0 \gamma_\mu)^{(2)} \rho(\mathbf{r}')] D_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{r}') g'_\omega(\rho_v(\mathbf{r}')) \\ &\quad + \frac{1}{2} (\gamma^0 \gamma^\mu)^{(1)} (\gamma^0 \gamma_\mu)^{(2)} g_\omega(\rho_v(\mathbf{r})) g_\omega(\rho_v(\mathbf{r}')) D_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{r}'). \end{aligned} \quad (\text{B.124})$$



$$\begin{aligned}
\frac{\delta II}{\delta \rho(\mathbf{r}')} &= \frac{1}{2} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') (\gamma^0 \gamma^\mu)^{(1)} g'_\omega(\rho_v(\mathbf{r})) \int d^3 r_2 g_\omega(\rho_v(\mathbf{r}_2)) D_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2) \text{Tr}[(\gamma^0 \gamma_\mu)^{(2)} \rho(\mathbf{r}_2)] \\
&+ \frac{1}{2} \text{Tr}[(\gamma^0 \gamma^\mu)^{(1)} \rho(\mathbf{r})] g''_\omega(\rho_v(\mathbf{r})) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \int d^3 r_2 g_\omega(\rho_v(\mathbf{r}_2)) D_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2) \text{Tr}[(\gamma^0 \gamma_\mu)^{(2)} \rho(\mathbf{r}_2)] \\
&+ \frac{1}{2} \text{Tr}[(\gamma^0 \gamma^\mu)^{(1)} \rho(\mathbf{r})] g'_\omega(\rho_v(\mathbf{r})) g'_\omega(\rho_v(\mathbf{r}')) D_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \text{Tr}[(\gamma^0 \gamma_\mu)^{(2)} \rho(\mathbf{r}')] \\
&+ \frac{1}{2} \text{Tr}[(\gamma^0 \gamma^\mu)^{(1)} \rho(\mathbf{r})] g'_\omega(\rho_v(\mathbf{r})) g_\omega(\rho_v(\mathbf{r}')) D_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{r}') (\gamma^0 \gamma_\mu)^{(2)}.
\end{aligned} \tag{B.125}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\delta III}{\delta \rho(\mathbf{r}')} &= \frac{1}{2} (\gamma^0 \gamma_\mu)^{(2)} g'_\omega(\rho_v(\mathbf{r})) \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \int d^3 r_1 \text{Tr}[(\gamma^0 \gamma^\mu)^{(1)} \rho(\mathbf{r})] g_\omega(\rho_v(\mathbf{r}_1)) D_\omega(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}) \\
&+ \frac{1}{2} g_\omega(\rho_v(\mathbf{r})) (\gamma^0 \gamma_\mu)^{(2)} (\gamma^0 \gamma^\mu)^{(1)} g_\omega(\rho_v(\mathbf{r}')) D_\omega(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \\
&+ \frac{1}{2} (\gamma^0 \gamma_\mu)^{(2)} g_\omega(\rho_v(\mathbf{r})) \text{Tr}[(\gamma^0 \gamma_\mu)^{(2)} \rho(\mathbf{r}')] g'_\omega(\rho_v(\mathbf{r}')) D_\omega(\mathbf{r}', \mathbf{r}).
\end{aligned} \tag{B.126}$$

Kombiniranjem gornjih rezultata dolazimo do konačnog izraza, uzimajući u obzir da prostorne komponente 4-struja iščezavaju

$$\begin{aligned}
\frac{\delta^2 E}{\delta \rho(\mathbf{r}) \delta \rho(\mathbf{r}')} &= (\gamma^0 \gamma_\mu)^{(2)} (\gamma^0 \gamma^\mu)^{(1)} g_\omega(\rho_v(\mathbf{r}')) g_\omega(\rho_v(\mathbf{r})) D_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \\
&+ \frac{I_\omega(\mathbf{r})}{r} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') [2g'_\omega(\rho_v(\mathbf{r})) + \rho_v(\mathbf{r}) g''_\omega(\rho_v(\mathbf{r}))] \mathbb{1}^{(1)} \mathbb{1}^{(2)} \\
&+ D_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{r}') [\rho_v(\mathbf{r}) \rho_v(\mathbf{r}') g'_\omega(\rho_v(\mathbf{r})) g'_\omega(\rho_v(\mathbf{r}')) \\
&+ \rho_v(\mathbf{r}) g'_\omega(\rho_v(\mathbf{r})) g_\omega(\rho_v(\mathbf{r}')) + \rho_v(\mathbf{r}') g_\omega(\rho_v(\mathbf{r})) g'_\omega(\rho_v(\mathbf{r}'))] \mathbb{1}^{(1)} \mathbb{1}^{(2)},
\end{aligned} \tag{B.127}$$

gdje smo iskoristili pokratu

$$I_\omega(r) = \int r' g_\omega(\rho_v(r')) D_\omega^0(r, r') \rho_v(r') dr'. \tag{B.128}$$

### B.1.3 $\rho$ -mezon

Interakcijski dio Lagrangijana  $\rho$ -mezona glasi

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_\rho &= -g_\rho \bar{\psi} \gamma \cdot \vec{\rho} \vec{\tau} \psi = -g_\rho \bar{\psi} \gamma^\mu \left( \int g_\rho(\rho_v) D_\rho(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \vec{j}_\mu(\mathbf{r}_2) d^3 r_2 \right) \vec{\tau} \psi \\
&= -g_\rho \bar{\psi} \gamma^{\mu(1)} \left( \int g_\rho D_\rho(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \bar{\psi} \gamma_\mu^{(2)} \vec{\tau}^{(2)} \psi d^3 r_2 \right) \vec{\tau}^{(1)} \psi.
\end{aligned} \tag{B.129}$$

Energijski funkcional gustoće interakcije je

$$E_\rho = \frac{1}{2} \int d^3 r_1 \int d^3 r_2 \text{Tr}[(\gamma^0 \gamma^\mu \vec{\tau})^{(1)} \rho(\mathbf{r}_1)] g_\rho(\rho_v(\mathbf{r}_1)) g_\rho(\rho_v(\mathbf{r}_2)) D_\rho(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \text{Tr}[(\gamma^0 \gamma_\mu \vec{\tau})^{(2)} \rho(\mathbf{r}_2)]. \tag{B.130}$$

Prva derivacija energijskog funkcionala gustoće je

$$\frac{\delta E_\rho}{\delta \rho(\mathbf{r})} = I + II + III \quad (\text{B.131})$$

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}(\gamma^0 \gamma^\mu \vec{\tau})^{(1)} g_\rho(\rho_v(\mathbf{r})) \int d^3 r_2 g_\rho(\rho_v(\mathbf{r}_2)) D_\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2) \text{Tr}[(\gamma^0 \gamma_\mu \vec{\tau})^{(2)} \rho(\mathbf{r}_2)], \\ II &= \frac{1}{2} g_\rho(\rho_v(\mathbf{r})) (\gamma^0 \gamma_\mu \vec{\tau})^{(2)} \int d^3 r_1 \text{Tr}[(\gamma^0 \gamma^\mu \vec{\tau})^{(1)} \rho(\mathbf{r}_1)] g_\rho(\rho_v(\mathbf{r}_1)) D_\rho(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}), \\ III &= \text{Tr}[(\gamma^0 \gamma^\mu \vec{\tau})^{(1)} \rho(\mathbf{r})] g'_\rho(\rho_v(\mathbf{r})) \int d^3 r_2 g_\rho(\rho_v(\mathbf{r}_2)) D_\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2) \text{Tr}[(\gamma^0 \gamma_\mu \vec{\tau})^{(2)} \rho(\mathbf{r}_2)]. \end{aligned} \quad (\text{B.132})$$

Kako bi dobili rezidualnu interakciju ponovno deriviramo po gustoći

$$\begin{aligned} \frac{\delta I}{\delta \rho(\mathbf{r}')} &= \frac{1}{2}(\gamma^0 \gamma^\mu \vec{\tau})^{(1)} g'_\rho(\rho_v(\mathbf{r})) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \int d^3 r_2 g_\rho(\rho_v(\mathbf{r}_2)) D_\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2) \vec{j}_{(2)\mu}(\mathbf{r}_2) \\ &\quad + \frac{1}{2}(\gamma^0 \gamma^\mu \vec{\tau})^{(1)} g_\rho(\rho_v(\mathbf{r})) g_\rho(\rho_v(\mathbf{r}')) D_\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \vec{j}_{(2)\mu}(\mathbf{r}') \\ &\quad + \frac{1}{2}(\gamma^0 \gamma^\mu \vec{\tau})^{(1)} (\gamma^0 \gamma_\mu \vec{\tau})^{(2)} g_\rho(\rho_v(\mathbf{r})) g_\rho(\rho_v(\mathbf{r}')) D_\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}'). \end{aligned} \quad (\text{B.133})$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta II}{\delta \rho(\mathbf{r}')} &= \frac{1}{2} g'_\rho(\rho_v(\mathbf{r})) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') (\gamma^0 \gamma_\mu \vec{\tau})^{(2)} \int d^3 r_1 g_\rho(\rho_v(\mathbf{r}_1)) D_\rho(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}) \vec{j}^{(1)\mu}(\mathbf{r}_1) \\ &\quad + \frac{1}{2} g_\rho(\rho_v(\mathbf{r})) (\gamma^0 \gamma^\mu \vec{\tau})^{(1)} (\gamma^0 \gamma_\mu \vec{\tau})^{(2)} g_\rho(\rho_v(\mathbf{r}')) D_\rho(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \\ &\quad + \frac{1}{2} g_\rho(\rho_v(\mathbf{r})) (\gamma^0 \gamma_\mu \vec{\tau})^{(2)} g'_\rho(\rho_v(\mathbf{r}')) D_\rho(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \vec{j}^{(1)\mu}(\mathbf{r}'). \end{aligned} \quad (\text{B.134})$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta III}{\delta \rho(\mathbf{r}')} &= (\gamma^0 \gamma^\mu \vec{\tau})^{(1)} \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) g'_\rho(\rho_v(\mathbf{r})) \int d^3 r_2 g_\rho(\rho_v(\mathbf{r}_2)) D_\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2) \vec{j}_{(2)\mu}(\mathbf{r}_2) \\ &\quad + \vec{j}^{(1)\mu}(\mathbf{r}) g''_\rho(\rho_v(\mathbf{r})) \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \int d^3 r_2 g_\rho(\rho_v(\mathbf{r}_2)) D_\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2) \vec{j}_{(2)\mu}(\mathbf{r}_2) \\ &\quad + \vec{j}^{(1)\mu}(\mathbf{r}) g'_\rho(\rho_v(\mathbf{r})) g'_\rho(\rho_v(\mathbf{r}')) D_\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \vec{j}_{(2)\mu}(\mathbf{r}') \\ &\quad + \vec{j}^{(1)\mu}(\mathbf{r}) g'_\rho(\rho_v(\mathbf{r})) g_\rho(\rho_v(\mathbf{r}')) D_\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}') (\gamma^0 \gamma_\mu \vec{\tau})^{(2)}. \end{aligned} \quad (\text{B.135})$$

U nastavku izvoda zanemarujemo prostorne struje. Također zbog sačuvanja naboja preživljavaju samo treće komponente izospina pa rezidualna interakcija postaje

$$\begin{aligned}
\frac{\delta^2 E}{\delta \rho(\mathbf{r}) \delta \rho(\mathbf{r}')} &= (\gamma^0 \gamma^\mu \vec{\tau})^{(1)} (\gamma^0 \gamma_\mu \vec{\tau})^{(2)} g_\rho(\rho_v(\mathbf{r})) g_\rho(\rho_v(\mathbf{r}')) D_\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \\
&+ \frac{I_\rho(\mathbf{r})}{r} (\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \mathbb{1}^{(1)} \mathbb{1}^{(2)} \left[ g'_\rho(\rho_v(\mathbf{r})) \tau_1^3 + g'_\rho(\rho_v(\mathbf{r})) \tau_2^3 + \rho_{tv}(\mathbf{r}) g''_\rho(\rho_v(\mathbf{r})) \right] \\
&+ D_\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbb{1}^{(1)} \mathbb{1}^{(2)} \left[ g_\rho(\rho_v(\mathbf{r})) g'_\rho(\rho_v(\mathbf{r}')) \rho_{tv}(\mathbf{r}') \tau_1^3 \right. \\
&+ \rho_{tv}(\mathbf{r}) g'_\rho(\rho_v(\mathbf{r})) g'_\rho(\rho_v(\mathbf{r}')) \rho_{tv}(\mathbf{r}') \tau_2^3 \\
&\left. + \rho_{tv}(\mathbf{r}) g'_\rho(\rho_v(\mathbf{r})) g_\rho(\rho_v(\mathbf{r}')) D_\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right],
\end{aligned} \tag{B.136}$$

pri čemu smo koristili pokratu

$$I_\rho(r) = \int r' g_\sigma(\rho_v(r')) D_\rho^0(r, r') \rho_{tv}(r') dr, \tag{B.137}$$

gdje je  $D_\rho^0$  nulta komponenta u razvoju  $D_\rho$  po multipolima. Rezultati svih rezidualnih interakcija se poduradaju s onima u [23].

## B.2 Izvod matičnih elemenata za DD-ME interakciju

### B.2.1 Izoskalarni-skalarni član

Rezidualna interakcija skalarnog  $\sigma$  mezona je

$$\begin{aligned}
V_\sigma^{res} &= -\gamma_0^{(1)} \gamma_0^{(2)} g_\sigma(\rho_v(\mathbf{r}_1)) g_\sigma(\rho_v(\mathbf{r}_2)) D_\sigma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) - \left( \gamma_0^{(1)} \mathbb{1}^{(2)} \frac{\partial g_\sigma}{\partial \rho_v(\vec{r}_1)} + \mathbb{1}^{(1)} \mathbb{1}^{(2)} \frac{\partial^2 g_\sigma}{\partial \rho_v^2(\mathbf{r}_2)} \rho_s(\mathbf{r}_1) \right. \\
&+ \mathbb{1}^{(1)} \gamma_0^{(2)} \frac{\partial g_\sigma}{\partial \rho_v(\mathbf{r}_1)} \left. \frac{I_\sigma(\mathbf{r}_1)}{r_1} \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) - \left( \gamma_0^{(1)} \mathbb{1}^{(2)} g_\sigma(\rho_v(\mathbf{r}_1)) \frac{\partial g_\sigma}{\partial \rho_v(\mathbf{r}_2)} \rho_s(\mathbf{r}_2) + \mathbb{1}^{(1)} \gamma_0^{(2)} \frac{\partial g_\sigma}{\partial \rho_v(\mathbf{r}_1)} \rho_s(\mathbf{r}_1) \right. \right. \\
&\left. \left. + \mathbb{1}^{(1)} \mathbb{1}^{(2)} \frac{\partial g_\sigma}{\partial \rho_v(\mathbf{r}_1)} \rho_s(\mathbf{r}_1) \frac{\partial g_\sigma}{\partial \rho_v(\mathbf{r}_2)} \rho_s(\mathbf{r}_2) \right) D_\sigma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \right].
\end{aligned} \tag{B.138}$$

Koristim sljedeće oznake radi preglednosti članova rezidualne interakcije

$$\begin{aligned}
V_\sigma^{res} &= V_\sigma^{(1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + V_\sigma^{(2,1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + V_\sigma^{(2,2)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + V_\sigma^{(2,3)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \\
&+ V_\sigma^{(3,1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + V_\sigma^{(3,2)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + V_\sigma^{(3,3)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)
\end{aligned} \tag{B.139}$$

Fokusirajmo se prvo na označeni član. Prilikom izvoda koristimo razvoj propagatora po multipolima

$$D_\sigma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{r_1 r_2} \sum_{\lambda \mu} D_\sigma^\lambda(r_1, r_2) Y_{\lambda \mu}(\Omega_1) Y_{\lambda \mu}^*(\Omega_2). \tag{B.140}$$

Računamo dvočestični matrični element

$$\begin{aligned}
V_{abcd}^{\sigma(1)} &= \langle ab | V_{\sigma}^{(1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) | cd \rangle = - \int d\mathbf{r}_1 r_1^2 d\Omega_1 \int d\mathbf{r}_2 r_2^2 d\Omega_2 \bar{\psi}_a(\mathbf{r}_1) \bar{\psi}_b(\mathbf{r}_2) \times \\
&\times \left[ \gamma_0^{(1)} \gamma_0^{(2)} g_{\sigma}(\rho_v(\mathbf{r}_1)) g_{\sigma}(\rho_v(\mathbf{r}_2)) \frac{1}{r_1 r_2} \sum_{\lambda\mu} D_{\sigma}^{\lambda}(r_1, r_2) Y_{\lambda\mu}(\Omega_1) Y_{\lambda\mu}^*(\Omega_2) \right] \psi_c(\mathbf{r}_1) \psi_d(\mathbf{r}_2) \\
&= - \int d\mathbf{r}_1 r_1 \int d\mathbf{r}_2 r_2 \int d\Omega_1 d\Omega_2 \sum_{\lambda\mu} \left[ \bar{\psi}_a(\mathbf{r}_1) \gamma_0^{(1)} g_{\sigma}(\rho_v(\mathbf{r}_1)) Y_{\lambda\mu}(\Omega_1) \psi_c(\mathbf{r}_1) \right] D_{\sigma}^{\lambda}(r_1, r_2) \times \\
&\times \left[ \bar{\psi}_b(\mathbf{r}_2) \gamma_0^{(2)} g_{\sigma}(\rho_v(\mathbf{r}_2)) Y_{\lambda\mu}^*(\Omega_2) \psi_d(\mathbf{r}_2) \right].
\end{aligned} \tag{B.141}$$

Pogledajmo sada zasebno svaki od kutnih dijelova

$$\begin{aligned}
&\int d\Omega_1 \left[ \bar{\psi}_a(\mathbf{r}_1) \gamma_0^{(1)} g_{\sigma}(\rho_v(\mathbf{r}_1)) Y_{\lambda\mu}(\Omega_1) \psi_c(\mathbf{r}_1) \right] \\
&= \int d\Omega_1 \left( f_{n_a \kappa_a}(r_1) \Omega_{\kappa_a m_a}^{\dagger}(\Omega_1) \quad -i g_{n_a \kappa_a}(r_1) \Omega_{\kappa_a m_a}^{\dagger}(\Omega_1) \right) g_{\sigma}(\rho_v(\mathbf{r}_1)) Y_{\lambda\mu}(\Omega_1) \begin{pmatrix} f_{n_c \kappa_c}(r_1) \Omega_{\kappa_c m_c}(\Omega_1) \\ i g_{n_c \kappa_c}(r_1) \Omega_{\kappa_c m_c}(\Omega_1) \end{pmatrix} \\
&= \int d\Omega_1 g_{\sigma}(\rho_v(\mathbf{r}_1)) Y_{\lambda\mu} \left[ f_{n_a \kappa_a}(r_1) f_{n_c \kappa_c}(r_1) \Omega_{\kappa_a m_a}^{\dagger}(\Omega_1) \Omega_{\kappa_c m_c}(\Omega_1) \right. \\
&\quad \left. + g_{n_a \kappa_a}(r_1) g_{n_c \kappa_c}(r_1) \Omega_{\kappa_a m_a}^{\dagger}(\Omega_1) \Omega_{\kappa_c m_c}(\Omega_1) \right].
\end{aligned} \tag{B.142}$$

Promotrimo kutni dio označenog dijela

$$\begin{aligned}
&f_{n_a \kappa_a}(r_1) f_{n_c \kappa_c}(r_1) \int d\Omega_1 \Omega_{\kappa_a m_a}^{\dagger}(\Omega_1) \Omega_{\kappa_c m_c}(\Omega_1) Y_{\lambda\mu}(\Omega_1) \\
&= f_{n_a \kappa_a}(r_1) f_{n_c \kappa_c}(r_1) \int d\Omega_1 \left( \sum_{m_{l_a}, m_s} C_{sm_s l_a m_{l_a}}^{j_a m_a} Y_{l_a m_{l_a}}^*(\Omega_1) \chi_{sm_s}^{\dagger} \right) \left( \sum_{m_{l_c}, m'_s} C_{sm'_s l_c m_{l_c}}^{j_c m_c} Y_{l_c m_{l_c}}^*(\Omega_1) \chi_{sm'_s} \right) Y_{\lambda\mu}(\Omega_1) \\
\blacktriangle &= f_{n_a \kappa_a}(r_1) f_{n_c \kappa_c}(r_1) \sum_{m_{l_a}, m_{l_c}, m_s} C_{sm_s l_a m_{l_a}}^{j_a m_a} C_{sm_s l_c m_{l_c}}^{j_c m_c} \int d\Omega_1 Y_{l_a m_{l_a}}^*(\Omega_1) Y_{l_c m_{l_c}}(\Omega_1) Y_{\lambda\mu}(\Omega_1).
\end{aligned} \tag{B.143}$$

Primjenimo Gauntovu formulu na označeni dio ([47] 5.9.)

$$\int d\Omega_1 Y_{l_a m_{l_a}}^*(\Omega_1) Y_{l_c m_{l_c}}(\Omega_1) Y_{\lambda\mu}(\Omega_1) = \frac{\hat{l}_c \hat{\lambda}}{\sqrt{4\pi} \hat{l}_a} C_{l_c 0 \lambda 0}^{l_a 0} C_{l_c m_{l_c} \lambda \mu}^{l_a m_{l_a}} \tag{B.144}$$

$$\blacktriangle = f_{n_a \kappa_a}(r_1) f_{n_c \kappa_c}(r_1) \frac{\hat{l}_c \hat{\lambda}}{\sqrt{4\pi} \hat{l}_a} C_{l_c 0 \lambda 0}^{l_a 0} \sum_{m_{l_a}, m_{l_c}, m_s} C_{l_c m_{l_c} \lambda \mu}^{l_a m_{l_a}} C_{sm_s l_a m_{l_a}}^{j_a m_a} C_{sm_s l_c m_{l_c}}^{j_c m_c} \tag{B.145}$$

Koristimo izraz (14) u 8.7.3. u [47] kako bi povezali CG koeficijente

$$\blacktriangle = f_{n_a \kappa_a}(r_1) f_{n_c \kappa_c}(r_1) \frac{\hat{l}_c \hat{\lambda} \hat{j}_c}{\sqrt{4\pi}} (-1)^{\frac{1}{2}+j_a+l_c+\lambda} C_{l_c 0 \lambda 0}^{l_a 0} C_{l_c m_{l_c} \lambda \mu}^{l_a m_{l_a}} \begin{Bmatrix} l_c & 1/2 & j_c \\ j_a & \lambda & l_a \end{Bmatrix}. \quad (\text{B.146})$$

Koristeći kontrakciju 3j i 6j simbola konačno dolazimo na

$$\blacktriangle = f_{n_a \kappa_a}(r_1) f_{n_c \kappa_c}(r_1) \frac{\hat{\lambda} \hat{j}_c}{\sqrt{4\pi}} (-1)^{3/2+j_a} \frac{1+(-1)^{l_a+l_c+\lambda}}{2} C_{l_c m_{l_c} \lambda \mu}^{l_a m_{l_a}} \begin{pmatrix} j_a & \lambda & j_c \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.147})$$

Za prvi separabilni dio u (B.141) konačno možemo pisati

$$\begin{aligned} & \int d\Omega_1 \left[ \bar{\psi}_a(\mathbf{r}_1) \gamma_0^{(1)} g_\sigma(\rho_v(\mathbf{r}_1)) Y_{\lambda\mu}(\Omega_1) \psi_c(\mathbf{r}_1) \right] \\ &= f_{n_a \kappa_a}(r_1) f_{n_c \kappa_c}(r_1) \frac{\hat{\lambda} \hat{j}_c}{\sqrt{4\pi}} (-1)^{3/2+j_a} \frac{1+(-1)^{l_a+l_c+\lambda}}{2} C_{l_c m_{l_c} \lambda \mu}^{l_a m_{l_a}} \begin{pmatrix} j_a & \lambda & j_c \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} + \\ & g_{n_a \kappa_a}(r_1) g_{n_c \kappa_c}(r_1) \frac{\hat{\lambda} \hat{j}_c}{\sqrt{4\pi}} (-1)^{3/2+j_a} \frac{1+(-1)^{\bar{l}_a+\bar{l}_c+\lambda}}{2} C_{l_c m_{l_c} \lambda \mu}^{l_a m_{l_a}} \begin{pmatrix} j_a & \lambda & j_c \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \blacktriangle. \end{aligned} \quad (\text{B.148})$$

Vrijedi  $(-1)^{\bar{l}_a+\bar{l}_c+\lambda} = (-1)^{l_a+l_c+\lambda}$ , stoga možemo skupiti članove u jedan izraz

$$\blacktriangle = \frac{\hat{\lambda} \hat{j}_c}{\sqrt{4\pi}} (-1)^{3/2+j_a} \frac{1+(-1)^{l_a+l_c+\lambda}}{2} C_{l_c m_{l_c} \lambda \mu}^{l_a m_{l_a}} \begin{pmatrix} j_a & \lambda & j_c \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} (f_{n_a \kappa_a}(r_1) f_{n_c \kappa_c}(r_1) + g_{n_a \kappa_a}(r_1) g_{n_c \kappa_c}(r_1)). \quad (\text{B.149})$$

Sada pogledajmo kutni integral po  $\Omega_2$

$$\begin{aligned} & \int d\Omega_2 \left[ \bar{\psi}_b(r_2) \gamma_0^{(2)} Y_{\lambda\mu}^*(\Omega_2) \psi_d(r_2) \right] = \int d\Omega_2 \left( f_{n_b \kappa_b}(r_2) \Omega_{\kappa_b m_b}^\dagger(\Omega_2) - i g_{n_b \kappa_b}(r_2) \Omega_{\bar{\kappa}_b m_b}^\dagger(\Omega_2) \right) \times \\ & \times Y_{\lambda\mu}^*(\Omega_1) \begin{pmatrix} f_{n_d \kappa_d}(r_2) \Omega_{\kappa_d m_d}(\Omega_2) \\ i g_{n_d \kappa_d}(r_2) \Omega_{\bar{\kappa}_d m_d}(\Omega_2) \end{pmatrix} \\ &= \int d\Omega_2 Y_{\lambda\mu}^* \left[ f_{n_b \kappa_b}(r_2) f_{n_d \kappa_d}(r_2) \Omega_{\kappa_b m_b}^\dagger(\Omega_2) \Omega_{\kappa_d m_d}(\Omega_2) + g_{n_b \kappa_b}(r_2) g_{n_d \kappa_d}(r_2) \Omega_{\bar{\kappa}_b m_b}^\dagger(\Omega_2) \Omega_{\bar{\kappa}_d m_d}(\Omega_2) \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.150})$$

Ponovno se usredotočimo na označeni dio, te nastavljamo račun, imajući na umu da sada imamo konjugiranu kuglinu funkciju u izrazu koja unosi dodatnu fazu prilikom korištenja

Gauntove formule.

$$\begin{aligned}
& f_{n_b \kappa_b}(r_2) f_{n_d \kappa_d}(r_2) \int d\Omega_2 \Omega_{\kappa_b m_b}^\dagger(\Omega_2) \Omega_{\kappa_d m_d}(\Omega_2) Y_{\lambda \mu}^*(\Omega_2) = f_{n_b \kappa_b}(r_2) f_{n_d \kappa_d}(r_2) \int d\Omega_2 Y_{\lambda \mu}^*(\Omega_2) \times \\
& \times \sum_{m_{l_b}, m_s} C_{sm_s l_b m_{l_b}}^{j_b m_b} Y_{l_b m_{l_b}}^*(\Omega_2) \chi_{sm_s}^\dagger \sum_{m_{l_d}, m'_s} C_{sm'_s l_d m_{l_d}}^{j_d m_d} Y_{l_d m_{l_d}}(\Omega_2) \chi_{sm'_s} \\
& = f_{n_b \kappa_b}(r_2) f_{n_d \kappa_d}(r_2) \sum_{m_{l_b}, m_{l_d}, m_s} C_{sm_s l_b m_{l_b}}^{j_b m_b} C_{sm_s l_d m_{l_d}}^{j_d m_d} \int d\Omega_2 Y_{\lambda \mu}^*(\Omega_2) Y_{l_b m_{l_b}}^*(\Omega_2) Y_{l_d m_{l_d}}(\Omega_2) = \square.
\end{aligned} \tag{B.151}$$

Malo trebamo modificirati označeni izraz kako bi mogli primjeniti Gauntovu formulu

$$\begin{aligned}
& \int d\Omega_2 Y_{\lambda \mu}^*(\Omega_2) Y_{l_b m_{l_b}}^*(\Omega_2) Y_{l_d m_{l_d}}(\Omega_2) = \int (-1)^\mu Y_{\lambda -\mu}(\Omega_2) Y_{l_b m_{l_b}}^*(\Omega_2) Y_{l_d m_{l_d}}(\Omega_2) \\
& = (-1)^\mu \frac{\hat{l}_d \hat{\lambda}}{\sqrt{4\pi} \hat{l}_b} C_{l_d 0 \lambda 0}^{l_b 0} C_{l_d m_{l_d} \lambda -\mu}^{l_b m_{l_b}}
\end{aligned} \tag{B.152}$$

$$\square = f_{n_b \kappa_b}(r_2) f_{n_d \kappa_d}(r_2) \frac{\hat{l}_d \hat{\lambda}}{\sqrt{4\pi} \hat{l}_b} (-1)^\mu C_{l_d 0 \lambda 0}^{l_b 0} \sum_{m_{l_b}, m_s} C_{sm_s l_b m_{l_b}}^{j_b m_b} C_{l_d m_{l_d} \lambda -\mu}^{l_b m_{l_b}} C_{sm_s l_d m_{l_d}}^{j_d m_d}. \tag{B.153}$$

Sređivanjem gornjeg izraza analogno prethodnom slučaju dobivamo

$$\square = f_{n_b \kappa_b}(r_2) f_{n_d \kappa_d}(r_2) \frac{\hat{j}_d \hat{\lambda}}{\sqrt{4\pi}} (-1)^\mu (-1)^{3/2+j_b} \frac{1 + (-1)^{l_b + \lambda + l_d}}{2} C_{j_d m_d \lambda -\mu}^{j_b m_b} \begin{pmatrix} j_b & \lambda & j_d \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \tag{B.154}$$

Ukupno za integral po  $\Omega_2$  se dobije

$$\begin{aligned}
& \int d\Omega_2 \left[ \bar{\psi}_b(r_2) \gamma_0^{(2)} Y_{\lambda \mu}^*(\Omega_2) \psi_d(r_2) \right] = \frac{\hat{j}_d \hat{\lambda}}{\sqrt{4\pi}} (-1)^\mu (-1)^{3/2+j_b} \frac{1 + (-1)^{l_b + \lambda + l_d}}{2} C_{j_d m_d \lambda -\mu}^{j_b m_b} \begin{pmatrix} j_b & \lambda & j_d \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \times \\
& \times (f_{n_b \kappa_b}(r_2) f_{n_d \kappa_d}(r_2) + g_{n_b \kappa_b}(r_2) g_{n_d \kappa_d}(r_2)).
\end{aligned} \tag{B.155}$$

Kombiniranjem svih rezultata ukupni matrični element možemo zapisati kao

$$\begin{aligned}
V_{abcd}^{\sigma(1)} &= \int dr_1 r_1 \int dr_2 r_2 g_{\sigma}(\rho_v(r_1)) g_{\sigma}(\rho_v(r_2)) \times \\
&\times (f_{n_a \kappa_a}(r_1) f_{n_c \kappa_c}(r_1) + g_{n_a \kappa_a}(r_1) g_{n_c \kappa_c}(r_1)) (f_{n_b \kappa_b}(r_2) f_{n_d \kappa_d}(r_2) + g_{n_b \kappa_b}(r_2) g_{n_d \kappa_d}(r_2)) \times \\
&\times \sum_{\lambda \mu} D_{\sigma}^{\lambda}(r_1, r_2) \frac{\hat{\lambda}^2 \hat{j}_c \hat{j}_d}{4\pi} (-1)^{j_a + j_b} \left[ \frac{1 + (-1)^{l_a + l_c + \lambda}}{2} \right] \left[ \frac{1 + (-1)^{l_b + l_d + \lambda}}{2} \right] (-1)^{\mu} C_{j_c m_c \lambda \mu}^{j_a m_a} C_{j_d m_d \lambda - \mu}^{j_b m_b} \times \\
&\times \begin{pmatrix} j_a & \lambda & j_c \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_b & \lambda & j_d \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{B.156}$$

Sada sve možemo vezati u ukupni angularni moment  $J$

$$\begin{aligned}
V_{abcd}^{\sigma(1)(JM)} &= \int dr_1 r_1 \int dr_2 r_2 g_{\sigma}(\rho_v(r_1)) g_{\sigma}(\rho_v(r_2)) \times \\
&\text{valne fje.} \times \sum_{m_a m_c} C_{j_a m_a j_c - m_c}^{JM} (-1)^{j_c - m_c} \sum_{m_b m_d} C_{j_d m_d j_b - m_b}^{JM} (-1)^{j_b - m_b} \times \\
&\times D_{\sigma}^{\lambda}(r_1, r_2) \frac{\hat{\lambda}^2 \hat{j}_c \hat{j}_d}{4\pi} (-1)^{j_a + j_b} \left[ \frac{1 + (-1)^{l_a + l_c + \lambda}}{2} \right] \left[ \frac{1 + (-1)^{l_b + l_d + \lambda}}{2} \right] (-1)^{\mu} C_{j_c m_c \lambda \mu}^{j_a m_a} C_{j_d m_d \lambda - \mu}^{j_b m_b} \times \\
&\times \begin{pmatrix} j_a & \lambda & j_c \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_b & \lambda & j_d \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{B.157}$$

Promotrimo sljedeće izraze koji se pojavljuju u gornjoj relaciji

$$\sum_{m_a m_c} C_{j_a m_a j_c - m_c}^{JM} (-1)^{j_c - m_c} C_{j_c m_c \lambda \mu}^{j_a m_a} = \square. \tag{B.158}$$

Iskoristimo simetriju

$$\begin{aligned}
C_{j_c m_c \lambda \mu}^{j_a m_a} &= (-1)^{j_c - m_c} \frac{\hat{j}_a}{\hat{\lambda}} C_{j_a m_a j_c - m_c}^{\lambda \mu} \\
\square &= \sum_{m_a m_c} C_{j_a m_a j_c - m_c}^{JM} (-1)^{j_c - m_c} (-1)^{j_c - m_c} \frac{\hat{j}_a}{\hat{\lambda}} C_{j_a m_a j_c - m_c}^{\lambda \mu} = \frac{\hat{j}_a}{\hat{\lambda}} \delta_{J\lambda} \delta_{M\mu}.
\end{aligned} \tag{B.159}$$

Analogno za drugu sumu se može pokazati

$$\sum_{m_b m_d} C_{j_d m_d j_b - m_b}^{JM} (-1)^{j_b - m_b} C_{j_d m_d \lambda - \mu}^{j_b m_b} = (-1)^{j_b + j_d} (-1)^M \frac{\hat{j}_b}{\hat{\lambda}} \delta_{J\lambda} \delta_{M\mu}. \tag{B.160}$$

Konačni izraz za vezani matrični element je

$$\begin{aligned}
V_{abcd}^{\sigma(1)(JM)} &= \int dr_1 r_1 \int dr_2 r_2 g_\sigma(\rho_v(r_1)) g_\sigma(\rho_v(r_2)) \times \\
&\times (f_{n_a \kappa_a}(r_1) f_{n_c \kappa_c}(r_1) + g_{n_a \kappa_a}(r_1) g_{n_c \kappa_c}(r_1)) (f_{n_b \kappa_b}(r_2) f_{n_d \kappa_d}(r_2) + g_{n_b \kappa_b}(r_2) g_{n_d \kappa_d}(r_2)) \times \\
&\times \frac{\hat{j}_a \hat{j}_b \hat{j}_c \hat{j}_d}{4\pi} D_\sigma^J(r_1, r_2) \left[ \frac{1 + (-1)^{l_a + l_c + J}}{2} \right] \left[ \frac{1 + (-1)^{l_b + l_d + J}}{2} \right] \begin{pmatrix} j_a & J & j_c \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_b & J & j_d \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{B.161}$$

Vratimo se na relaciju (B.139) i promotrimo sljedeći izraz u nizu

$$\begin{aligned}
V_\sigma^{res} &= V_\sigma^{(1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + V_\sigma^{(2,1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + V_\sigma^{(2,2)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + V_\sigma^{(2,3)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \\
&+ V_\sigma^{(3,1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + V_\sigma^{(3,2)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + V_\sigma^{(3,3)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)
\end{aligned} \tag{B.162}$$

Delta funkciju razvijamo kao [59]

$$\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \int dr r^2 \frac{\delta(r - r_1) \delta(r - r_2)}{r^2 r_1 r_2} \sum_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu}^*(\Omega_1) Y_{\lambda\mu}(\Omega_2). \tag{B.163}$$

Matrični element pišemo kao

$$\begin{aligned}
V_{abcd}^{\sigma(2,1)} &= - \int dr_1 r_1^2 d\Omega_1 \int dr_2 r_2^2 d\Omega_2 \int dr r^2 \sum_{\lambda\mu} \left[ \bar{\psi}_a(r_1) \gamma_0^{(1)} \frac{\partial g_\sigma}{\partial \rho_v(r_1)} \frac{I_\sigma(r_1)}{r_1} \frac{\delta(r - r_1)}{r r_1} Y_{\lambda\mu}^*(\Omega_1) \psi_c(r_1) \right] \times \\
&\times \left[ \bar{\psi}_b(r_2) \mathbb{1}^{(2)} \frac{\delta(r - r_2)}{r r_2} Y_{\lambda\mu}(\Omega_2) \psi_d(r_2) \right].
\end{aligned} \tag{B.164}$$

Izvod je analogan onom za prethodni matrični element, a konačni rezultat glasi

$$\begin{aligned}
V_{abcd}^{\sigma(2,1)(JM)} &= \int dr r I_\sigma(r) \frac{\partial g_\sigma}{\partial \rho_v(r)} (f_{n_a \kappa_a} f_{n_c \kappa_c} + g_{n_a \kappa_a} g_{n_c \kappa_c}) (f_{n_b \kappa_b} f_{n_d \kappa_d} + g_{n_b \kappa_b} g_{n_d \kappa_d}) \times \\
&\times (-1)^{j_a + j_d} \frac{\hat{j}_a \hat{j}_b \hat{j}_c \hat{j}_d}{4\pi} \left[ \frac{1 + (-1)^{l_a + l_c + J}}{2} \right] \left[ \frac{1 + (-1)^{l_b + l_d + J}}{2} \right] \times \\
&\times \begin{pmatrix} j_a & J & j_c \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_b & J & j_d \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{B.165}$$



U nastavku pišem rezultat za preostale članove

$$\begin{aligned}
V_{abcd}^{\sigma(2,2)(JM)} &= \int dr r I_\sigma(r) \frac{\partial^2 g_\sigma}{\partial \rho_v^2(r)} \rho_s(r) (f_{n_a \kappa_a} f_{n_c \kappa_c} - g_{n_a \kappa_a} g_{n_c \kappa_c}) (f_{n_b \kappa_b} f_{n_d \kappa_d} - g_{n_b \kappa_b} g_{n_d \kappa_d}) \times \\
&\times (-1)^{j_c + j_d} \frac{\hat{j}_a \hat{j}_b \hat{j}_c \hat{j}_d}{4\pi} \left[ \frac{1 + (-1)^{l_a + l_c + J}}{2} \right] \left[ \frac{1 + (-1)^{l_b + l_d + J}}{2} \right] \times \\
&\times \begin{pmatrix} j_a & J & j_c \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_b & J & j_d \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{B.166}$$

$$\begin{aligned}
V_{abcd}^{\sigma(2,3)(JM)} &= \int dr r I_\sigma(r) \frac{\partial g_\sigma}{\partial \rho_v(r)} (f_{n_a \kappa_a} f_{n_c \kappa_c} - g_{n_a \kappa_a} g_{n_c \kappa_c}) (f_{n_b \kappa_b} f_{n_d \kappa_d} + g_{n_b \kappa_b} g_{n_d \kappa_d}) \times \\
&\times (-1)^{j_a + j_d} \frac{\hat{j}_a \hat{j}_b \hat{j}_c \hat{j}_d}{4\pi} \left[ \frac{1 + (-1)^{l_a + l_c + J}}{2} \right] \left[ \frac{1 + (-1)^{l_b + l_d + J}}{2} \right] \times \\
&\times \begin{pmatrix} j_a & J & j_c \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_b & J & j_d \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{B.167}$$

$$\begin{aligned}
V_{abcd}^{\sigma(3,1)(JM)} &= \int dr_1 r_1 g_\sigma(\rho_v(r_1)) (f_{n_a \kappa_a}(r_1) f_{n_c \kappa_c}(r_1) + g_{n_a \kappa_a}(r_1) g_{n_c \kappa_c}(r_1)) \int dr_2 r_2 \frac{\partial g_\sigma}{\partial \rho_v(r_2)} \rho_s(r_2) \times \\
&\times (f_{n_b \kappa_b}(r_2) f_{n_d \kappa_d}(r_2) - g_{n_b \kappa_b}(r_2) g_{n_d \kappa_d}(r_2)) (-1)^{j_b + j_d} \frac{\hat{j}_a \hat{j}_b \hat{j}_c \hat{j}_d}{4\pi} D_\sigma^J(r_1, r_2) \times \\
&\times \left[ \frac{1 + (-1)^{l_a + l_c + J}}{2} \right] \left[ \frac{1 + (-1)^{l_b + l_d + J}}{2} \right] \begin{pmatrix} j_a & J & j_c \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_b & J & j_d \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{B.168}$$

$$\begin{aligned}
V_{abcd}^{\sigma(3,2)(JM)} &= \int dr_1 r_1 \frac{\partial g_\sigma}{\partial \rho_v(r_1)} \rho_s(r_1) (f_{n_a \kappa_a}(r_1) f_{n_c \kappa_c}(r_1) - g_{n_a \kappa_a}(r_1) g_{n_c \kappa_c}(r_1)) \int dr_2 r_2 g_\sigma(\rho_v(r_2)) \times \\
&\times (f_{n_b \kappa_b}(r_2) f_{n_d \kappa_d}(r_2) + g_{n_b \kappa_b}(r_2) g_{n_d \kappa_d}(r_2)) (-1)^{j_a + j_d} \frac{\hat{j}_a \hat{j}_b \hat{j}_c \hat{j}_d}{4\pi} D_\sigma^J(r_1, r_2) \times \\
&\times \left[ \frac{1 + (-1)^{l_a + l_c + J}}{2} \right] \left[ \frac{1 + (-1)^{l_b + l_d + J}}{2} \right] \begin{pmatrix} j_a & J & j_c \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_b & J & j_d \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{B.169}$$

$$\begin{aligned}
V_{abcd}^{\sigma(3,3)(JM)} = & \int dr_1 r_1 \frac{\partial g_\sigma}{\partial \rho_v(r_1)} \rho_s(r_1) (f_{n_a \kappa_a}(r_1) f_{n_c \kappa_c}(r_1) - g_{n_a \kappa_a}(r_1) g_{n_c \kappa_c}(r_1)) \int dr_2 r_2 \frac{\partial g_\sigma}{\partial \rho_v(r_2)} \rho_s(r_2) \times \\
& \times (f_{n_b \kappa_b}(r_2) f_{n_d \kappa_d}(r_2) - g_{n_b \kappa_b}(r_2) g_{n_d \kappa_d}(r_2)) (-1)^{j_a+j_d} \frac{\hat{j}_a \hat{j}_b \hat{j}_c \hat{j}_d}{4\pi} D_\sigma^J(r_1, r_2) \times \\
& \times \left[ \frac{1+(-1)^{l_a+l_c+J}}{2} \right] \left[ \frac{1+(-1)^{l_b+l_d+J}}{2} \right] \begin{pmatrix} j_a & J & j_c \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_b & J & j_d \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{B.170}$$

### B.2.2 Izoskalarni-vektorski član

Izoskalarni-vektorski član u interakciji (B.127) glasi

$$V_\omega^{(1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = (\gamma^0 \gamma^\mu)^{(1)} (\gamma^0 \gamma_\mu)^{(2)} g_\omega(\rho_v(\mathbf{r}_1)) g_\omega(\rho_v(\mathbf{r}_2)) D_\omega(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2). \tag{B.171}$$

Prije samog izvoda važno je napomenuti sljedeće. Budući da nam se u izvodima pojavljuju Paulijeve matrice, koristim relaciju [47]

$$\chi_{sm'}^\dagger \hat{S}_\mu \chi_{sm} = \sqrt{S(S+1)} C_{sm1\mu}^{sm'}, \quad \hat{S} = \frac{1}{2} \hat{\sigma}. \tag{B.172}$$

Također sumu po Kartezijevim komponentama možemo prikazati preko sferično tenzorskih

$$\hat{\sigma}_i \hat{\sigma}^i = (-1)^\mu \hat{\sigma}_\mu \hat{\sigma}_{-\mu}. \tag{B.173}$$

Sada smo spremi za izvod

$$\begin{aligned}
V_{abcd}^{\omega(1)} = & \int dr_1 r_1 d\Omega_1 \int dr_2 r_2 d\Omega_2 \sum_{\lambda\mu} D_\omega^\lambda(r_1, r_2) \left[ \bar{\psi}_a(r_1) Y_{\lambda\mu}(\Omega_1) (\gamma^0 \gamma^\mu)^{(1)} g_\omega(\rho_v(\mathbf{r}_1)) \psi_c(r_1) \right] \times \\
& \times \left[ \bar{\psi}_b(r_2) Y_{\lambda\mu}^*(\Omega_2) (\gamma^0 \gamma_\mu)^{(2)} g_\omega(\rho_v(\mathbf{r}_2)) \psi_d(r_2) \right].
\end{aligned} \tag{B.174}$$

### B.2.3 Prostornolika komponenta

Ograničimo se na razmatranje prostorne komponente i to samo jednog kutnog dijela

$$\int d\Omega_1 \left[ \bar{\psi}_a(r_1) Y_{\lambda\mu}(\Omega_1) (\gamma^0 \gamma^i)^{(1)} g_\omega(\rho_v(\mathbf{r}_1)) \psi_c(r_1) \right]. \tag{B.175}$$

Vrijedi

$$\gamma^0 \gamma^i = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \tag{B.176}$$

$$\begin{aligned}
&= g_\omega \int d\Omega_1 Y_{\lambda\mu}(\Omega_1) \begin{pmatrix} f_{n_a\kappa_a} \Omega_{\kappa_a m_a}^\dagger & -ig_{n_a\kappa_a} \Omega_{\bar{\kappa}_a m_a}^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{n_c\kappa_c} \Omega_{\kappa_c m_c} \\ ig_{n_c\kappa_c} \Omega_{\bar{\kappa}_c m_c} \end{pmatrix} \\
&= g_\omega \int d\Omega_1 Y_{\lambda\mu}(\Omega_1) \begin{pmatrix} f_{n_a\kappa_a} \Omega_{\kappa_a m_a}^\dagger & -ig_{n_a\kappa_a} \Omega_{\bar{\kappa}_a m_a}^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{n_c\kappa_c} \Omega_{\kappa_c m_c} \\ ig_{n_c\kappa_c} \Omega_{\bar{\kappa}_c m_c} \end{pmatrix} \\
&= g_\omega \int d\Omega_1 Y_{\lambda\mu}(\Omega_1) \begin{pmatrix} f_{n_a\kappa_a} \Omega_{\kappa_a m_a}^\dagger & -ig_{n_a\kappa_a} \Omega_{\bar{\kappa}_a m_a}^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i\sigma_i f_{n_c\kappa_c} \Omega_{\kappa_c m_c} \\ -\sigma_i g_{n_c\kappa_c} \Omega_{\bar{\kappa}_c m_c} \end{pmatrix} \\
&= g_\omega \int d\Omega_1 Y_{\lambda\mu}(\Omega_1) (i \boxed{f_{n_a\kappa_a} g_{n_c\kappa_c} \Omega_{\kappa_a m_a}^\dagger \sigma_i \Omega_{\bar{\kappa}_c m_c}} + ig_{n_a\kappa_a} f_{n_c\kappa_c} \Omega_{\bar{\kappa}_a m_a}^\dagger \sigma_i \Omega_{\kappa_c m_c}).
\end{aligned} \tag{B.177}$$

Sada se prebacimo u bazu po sferičnim tenzorima kao na primjeru (B.172) i promotrimo označeni dio integrala.

$$\begin{aligned}
&\int d\Omega_1 Y_{\lambda\mu}(\Omega_1) f_{n_a\kappa_a} g_{n_c\kappa_c} \Omega_{\kappa_a m_a}^\dagger \hat{\sigma}_\nu \Omega_{\bar{\kappa}_c m_c} \\
&= f_{n_a\kappa_a} g_{n_c\kappa_c} \int d\Omega_1 Y_{\lambda\mu}(\Omega_1) \sum_{m_{l_a} m_s} C_{sm_s l_s m_{l_a}}^{j_a m_a} Y_{l_a m_{l_a}}^* \chi_{sm_s}^\dagger \hat{\sigma}_\nu \times \\
&\times \sum_{m_{\bar{l}_c} m'_s} C_{sm'_s \bar{l}_c m_{\bar{l}_c}}^{j_c m_c} Y_{\bar{l}_c m_{\bar{l}_c}} \chi_{sm'_s} = \square.
\end{aligned} \tag{B.178}$$

Primjenimo relaciju ortogonalnosti

$$\chi_{sm_s}^\dagger 2\hat{\mathcal{S}}_\nu \chi_{sm'_s} = \sqrt{3} C_{1/2m'_s 1\nu}^{1/2m_s} \tag{B.179}$$

$$\begin{aligned}
\square &= f_{n_a\kappa_a} g_{n_c\kappa_c} \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{\hat{l}_c \hat{\lambda}}{\hat{l}_a} C_{\bar{l}_c 0 \lambda 0}^{l_a 0} \sum_{\substack{m_{l_a} m_s \\ m_{\bar{l}_c} m'_s}} C_{1/2m_s l_a m_{l_a}}^{j_a m_a} C_{1/2m'_s \bar{l}_c m_{\bar{l}_c}}^{j_c m_c} C_{1/2m'_s 1\nu}^{1/2m_s} C_{\bar{l}_c m_{\bar{l}_c} \lambda \mu}^{l_a m_{l_a}} \\
&= \frac{3}{2} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \hat{l}_c \hat{\lambda} \hat{j}_a f_{n_a\kappa_a} g_{n_c\kappa_c} (-1)^{\mu+l_a-\bar{l}_c} (-1)^\nu C_{\bar{l}_c 0 \lambda 0}^{l_a 0} \sum_{k\kappa} \hat{k} C_{1-\nu\lambda-\mu}^{k\kappa} C_{j_a m_a k\kappa}^{j_c m_c} \begin{Bmatrix} j_c & 1/2 & \bar{l}_c \\ j_a & 1/2 & l_a \\ k & 1 & \lambda \end{Bmatrix}.
\end{aligned} \tag{B.180}$$

Ako iskombiniramo oba kutna dijela dobivamo

$$\begin{aligned}
& \int d\Omega_1 \left[ \bar{\psi}_a(r_1) Y_{\lambda\mu}(\Omega_1) (\gamma^0 \gamma^i)^{(1)} g_\omega(\rho_v(\mathbf{r}_1)) \psi_c(r_1) \right] \\
&= i g_\omega(\rho_v(\mathbf{r}_1)) \frac{3}{2} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} (-1)^\nu \hat{j}_a \hat{\lambda} \left[ f_{n_a \kappa_a} g_{n_c \kappa_c} (-1)^{\mu+l_a \bar{l}_c} \hat{l}_a C_{\bar{l}_c 0 \lambda 0}^{l_a 0} \sum_{k\kappa} \hat{k} C_{1-\nu \lambda -\mu}^{k\kappa} C_{j_a m_a k \kappa}^{j_c m_c} \begin{Bmatrix} j_c & 1/2 & \bar{l}_c \\ j_a & 1/2 & l_a \\ k & 1 & \lambda \end{Bmatrix} \right. \\
&+ \left. \hat{l}_a g_{n_a \kappa_a} f_{n_c \kappa_c} (-1)^{\mu+\bar{l}_a - l_c} C_{l_c 0 \lambda 0}^{\bar{l}_a 0} \sum_{k\kappa} \hat{k} C_{1-\nu \lambda -\mu}^{k\kappa} C_{j_a m_a k \kappa}^{j_c m_c} \begin{Bmatrix} j_c & 1/2 & l_c \\ j_a & 1/2 & \bar{l}_a \\ k & 1 & \lambda \end{Bmatrix} \right].
\end{aligned} \tag{B.181}$$

Sada možemo promotriti integral po  $\Omega_2$

$$\begin{aligned}
& \int d\Omega_2 \left[ \bar{\psi}_b(r_2) Y_{\lambda\mu}^*(\Omega_2) (\gamma^0 \gamma_i)^{(2)} g_\omega(\rho_v(\mathbf{r}_2)) \psi_d(r_2) \right] \\
&= -g_\omega \int d\Omega_2 Y_{\lambda\mu}^*(\Omega_2) \begin{pmatrix} f_{n_b \kappa_b} \Omega_{\kappa_b m_b}^\dagger & -i g_{n_b \kappa_b} \Omega_{\bar{\kappa}_b m_b}^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{n_d \kappa_d} \Omega_{\kappa_d m_d} \\ i g_{n_d \kappa_d} \Omega_{\bar{\kappa}_d m_d} \end{pmatrix} \\
&= -i g_\omega \int d\Omega_2 Y_{\lambda\mu}^*(\Omega_2) (f_{n_b \kappa_b} g_{n_d \kappa_d} \Omega_{\kappa_b m_b}^\dagger \hat{\sigma}_{-\nu} \Omega_{\bar{\kappa}_d m_d} + g_{n_b \kappa_b} f_{n_d \kappa_d} \Omega_{\bar{\kappa}_b m_b}^\dagger \hat{\sigma}_{-\nu} \Omega_{\kappa_d m_d}) = \square.
\end{aligned} \tag{B.182}$$

Izvod je analogan prethodnom slučaju pa dobivamo

$$\begin{aligned}
\square &= -i g_\omega(\rho_v(\mathbf{r}_2)) \frac{3}{2} \frac{\hat{j}_b \hat{\lambda}}{\sqrt{4\pi}} (-1)^\nu \left[ f_{n_b \kappa_b} g_{n_d \kappa_d} \hat{l}_d (-1)^{l_b - \bar{l}_d - \mu} C_{\bar{l}_d 0 \lambda 0}^{l_b 0} \sum_{k\kappa} \hat{k} C_{1\nu \lambda \mu}^{k\kappa} C_{j_b m_b k \kappa}^{j_d m_d} \begin{Bmatrix} j_d & 1/2 & \bar{l}_d \\ j_b & 1/2 & l_b \\ k & 1 & \lambda \end{Bmatrix} \right. \\
&+ \left. g_{n_b \kappa_b} f_{n_d \kappa_d} \hat{l}_d (-1)^{\bar{l}_b - l_d - \mu} C_{l_d 0 \lambda 0}^{\bar{l}_b 0} \sum_{k\kappa} \hat{k} C_{1\nu \lambda \mu}^{k\kappa} C_{j_b m_b k \kappa}^{j_d m_d} \begin{Bmatrix} j_d & 1/2 & l_d \\ j_b & 1/2 & \bar{l}_d \\ k & 1 & \lambda \end{Bmatrix} \right].
\end{aligned} \tag{B.183}$$

Ukupni matrični element vežemo u angularni moment  $J$  te imamo

$$\begin{aligned}
V_{abcd}^{\omega(1)(JM)} = & (-1)^{1-J-M+j_c+j_a} \int dr_1 r_1 \int dr_2 r_2 \sum_{\lambda} (-1)^{\lambda} D_{\omega}^{\lambda}(r_1, r_2) g_{\omega}(\rho_v(r_1)) g_{\omega}(\rho_v(r_2)) \frac{9}{4} \frac{\hat{j}_a \hat{j}_b \hat{j}_c \hat{j}_d \hat{\lambda}^2}{4\pi} \times \\
& \times \left[ f_{n_a \kappa_a}(r_1) g_{n_c \kappa_c}(r_1) \hat{l}_a C_{\bar{l}_c 0 \lambda 0}^{l_a 0} \begin{Bmatrix} j_c & 1/2 & \bar{l}_c \\ j_a & 1/2 & l_a \\ J & 1 & \lambda \end{Bmatrix} + g_{n_a \kappa_a}(r_1) f_{n_c \kappa_c}(r_1) \hat{l}_a C_{\bar{l}_c 0 \lambda 0}^{\bar{l}_a 0} \begin{Bmatrix} j_c & 1/2 & l_c \\ j_a & 1/2 & \bar{l}_a \\ J & 1 & \lambda \end{Bmatrix} \right] \times \\
& \times \left[ f_{n_b \kappa_b}(r_2) g_{n_d \kappa_d}(r_2) \bar{l}_d C_{\hat{l}_a 0 \lambda 0}^{l_b 0} \begin{Bmatrix} j_d & 1/2 & \bar{l}_d \\ j_b & 1/2 & l_b \\ J & 1 & \lambda \end{Bmatrix} + g_{n_b \kappa_b}(r_2) g_{n_d \kappa_d}(r_2) \hat{l}_d C_{\bar{l}_d 0 \lambda 0}^{\bar{l}_b 0} \begin{Bmatrix} j_d & 1/2 & l_d \\ j_b & 1/2 & \bar{l}_b \\ J & 1 & \lambda \end{Bmatrix} \right].
\end{aligned} \tag{B.184}$$

#### B.2.4 Vremenolika komponenta

Vremenolika komponenta izraza (B.171) glasi

$$V_{abcd}^{\omega(1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \mathbb{1}^{(1)} \mathbb{1}^{(2)} g_{\omega}(\rho_v(\mathbf{r}_1)) g_{\omega}(\rho_v(\mathbf{r}_2)) D_{\omega}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2). \tag{B.185}$$

$$\begin{aligned}
V_{abcd}^{\omega(1)} = & \int dr_1 r_1 d\Omega_1 \int dr_2 r_2 d\Omega_2 \sum_{\lambda\mu} D_{\omega}^{\lambda}(r_1, r_2) [\bar{\psi}_a(r_1) Y_{\lambda\mu}(\Omega_1) g_{\omega}(\rho_v(r_1)) \psi_c(r_1)] \times \\
& \times [\bar{\psi}_b(r_2) Y_{\lambda\mu}^*(\Omega_2) g_{\omega}(\rho_v(r_2)) \psi_d(r_2)].
\end{aligned} \tag{B.186}$$

Promotrimo prvo

$$\begin{aligned}
\int d\Omega_1 \bar{\psi}_a(r_1) Y_{\lambda\mu}(\Omega_1) g_{\omega}(\rho_v(r_1)) \psi_c(r_1) &= g_{\omega} \int d\Omega_1 Y_{\lambda\mu}(\Omega_1) \begin{pmatrix} f_{n_a \kappa_a} \Omega_{\kappa_a m_a}^{\dagger} & i g_{n_a \kappa_a} \Omega_{\bar{\kappa}_a m_a}^{\dagger} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{n_c \kappa_c} \Omega_{\kappa_c m_c} \\ i g_{n_c \kappa_c} \Omega_{\bar{\kappa}_c m_c} \end{pmatrix} \\
&= g_{\omega} \int d\Omega_1 Y_{\lambda\mu}(\Omega_1) \left[ f_{n_a \kappa_a} f_{n_c \kappa_c} \Omega_{\kappa_a m_a}^{\dagger} \Omega_{\kappa_c m_c} - g_{n_a \kappa_a} g_{n_c \kappa_c} \Omega_{\bar{\kappa}_a m_a}^{\dagger} \Omega_{\bar{\kappa}_c m_c} \right].
\end{aligned} \tag{B.187}$$

Fokusirajmo se na označeni član, te zanemarimo radijalni dio za sada

$$\begin{aligned}
\int d\Omega_1 Y_{\lambda\mu}(\Omega_1) \Omega_{\kappa_a m_a}^{\dagger} \Omega_{\kappa_c m_c} &= \int d\Omega_1 Y_{\lambda\mu}(\Omega_1) \sum_{m_s m_{l_a}} C_{1/2 m_s l_a m_{l_a}}^{j_a m_a} Y_{l_a m_{l_a}}^*(\Omega_1) \chi_{1/2 m_s}^{\dagger} \times \\
&\times \sum_{m'_s m_{l_c}} C_{1/2 m'_s l_c m_{l_c}}^{j_c m_c} Y_{l_c m_{l_c}}(\Omega_1) \chi_{1/2 m'_s}.
\end{aligned} \tag{B.188}$$

Koristeći relaciju ortogonalnosti

$$\chi_{1/2 m_s}^{\dagger} \chi_{1/2 m'_s} = \delta_{m_s m'_s}, \tag{B.189}$$

te Gauntovu formulu za sferne harmonike

$$\int d\Omega_1 Y_{l_a m_a}^* Y_{l_c m_c} = \frac{\hat{l}_c}{\sqrt{4\pi} \hat{l}_a} C_{l_c 0 \lambda 0}^{l_a 0} C_{l_c m_c \lambda \mu}^{l_a m_a}, \quad (\text{B.190})$$

dobivamo

$$\int d\Omega_1 Y_{\lambda \mu}(\Omega_1) \Omega_{\kappa_a m_a}^\dagger \Omega_{\kappa_c m_c} = \frac{\hat{l}_c}{\sqrt{4\pi} \hat{l}_a} C_{l_c 0 \lambda 0}^{l_a 0} \sum_{m_{l_a} m_{l_c} m_s} C_{l_c m_{l_c} \lambda \mu}^{l_a m_{l_a}} C_{1/2 m_s l_a m_{l_a}}^{j_a m_a} C_{1/2 m_s l_c m_{l_c}}^{j_c m_c}. \quad (\text{B.191})$$

Sumu 3 CG koeficijenta možemo prikazati pomoću 6j simbola [47]

$$\sum_{m_{l_a} m_{l_c} m_s} C_{l_c m_{l_c} \lambda \mu}^{l_a m_{l_a}} C_{1/2 m_s l_a m_{l_a}}^{j_a m_a} C_{1/2 m_s l_c m_{l_c}}^{j_c m_c} = (-1)^{\mu+l_c+1/2+j_c+\lambda} \hat{l}_a \hat{j}_a C_{j_a m_a \lambda - \mu}^{j_c m_c} \begin{Bmatrix} l_a & 1/2 & j_a \\ j_c & \lambda & l_c \end{Bmatrix}. \quad (\text{B.192})$$

Vrijedi

$$\int d\Omega_1 Y_{\lambda \mu} \Omega_{\kappa_a m_a}^\dagger \Omega_{\kappa_c m_c} = \frac{\hat{l}_c \hat{j}_a}{\sqrt{4\pi}} C_{l_c 0 \lambda 0}^{l_a 0} (-1)^{\mu+l_c+1/2+j_c+\lambda} C_{j_a m_a \lambda - \mu}^{j_c m_c} \begin{Bmatrix} l_a & 1/2 & j_a \\ j_c & \lambda & l_c \end{Bmatrix}. \quad (\text{B.193})$$

Prva zagrada u izrazu za matrični element (B.186) glasi

$$\begin{aligned} [\bar{\psi}_a(r_1) Y_{\lambda \mu}(\Omega_1) g_\omega \psi_c(r_1)] &= g_\omega \frac{\hat{l}_c \hat{j}_a}{\sqrt{4\pi}} C_{l_c 0 \lambda 0}^{l_a 0} C_{j_a m_a \lambda - \mu}^{j_c m_c} (-1)^{\mu+1/2+j_c+\lambda} \times \\ &\times \left[ f_{n_a \kappa_a} f_{n_c \kappa_c} (-1)^{l_c} \hat{l}_c \begin{Bmatrix} l_a & 1/2 & j_a \\ j_c & \lambda & l_c \end{Bmatrix} - g_{n_a \kappa_a} g_{n_c \kappa_c} (-1)^{\bar{l}_c} \hat{\bar{l}}_c \begin{Bmatrix} \bar{l}_a & 1/2 & j_a \\ j_c & \lambda & \bar{l}_c \end{Bmatrix} \right], \end{aligned} \quad (\text{B.194})$$

dok drugu zagradu u (B.186) dobivamo zamjenom  $j_a \rightarrow j_d, j_c \rightarrow j_b$ , pa za matrični element dobivamo

$$\begin{aligned} V_{abcd}^{\omega(1)} &= \int dr_1 r_1 \int dr_2 r_2 \sum_{\lambda \mu} D_\omega^\lambda(r_1, r_2) g_\omega(r_1) g_\omega(r_2) \frac{\hat{l}_c^2 \hat{j}_a \hat{j}_d}{4\pi} C_{l_c 0 \lambda 0}^{l_a 0} C_{l_b 0 \lambda 0}^{l_d 0} C_{j_a m_a \lambda - \mu}^{j_c m_c} C_{j_d m_d \lambda - \mu}^{j_b m_b} \times \\ &\times (-1)^{j_c+j_b} \left[ f_{n_a \kappa_a} f_{n_c \kappa_c} (-1)^{l_c} \hat{l}_c \begin{Bmatrix} l_a & 1/2 & j_a \\ j_c & \lambda & l_c \end{Bmatrix} - g_{n_a \kappa_a} g_{n_c \kappa_c} (-1)^{\bar{l}_c} \hat{\bar{l}}_c \begin{Bmatrix} \bar{l}_a & 1/2 & j_a \\ j_c & \lambda & \bar{l}_c \end{Bmatrix} \right] \times \\ &\times \left[ f_{n_b \kappa_b} f_{n_d \kappa_d} (-1)^{l_b} \hat{l}_b \begin{Bmatrix} l_d & 1/2 & j_d \\ j_b & \lambda & l_b \end{Bmatrix} - g_{n_b \kappa_b} g_{n_d \kappa_d} (-1)^{\bar{l}_b} \hat{\bar{l}}_b \begin{Bmatrix} \bar{l}_d & 1/2 & j_d \\ j_b & \lambda & \bar{l}_b \end{Bmatrix} \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.195})$$

Vežanjem u ukupni  $J$  konačno slijedi

$$\begin{aligned}
V_{abcd}^{\omega(1)JM} = & \int dr_1 r_1 \int dr_2 r_2 D_{\omega}^{\lambda}(r_1, r_2) g_{\omega}(r_1) g_{\omega}(r_2) \frac{\hat{j}_a \hat{j}_b \hat{j}_c \hat{j}_d}{4\pi} (-1)^{j_a + j_d} C_{l_c 0 \lambda 0}^{l_a 0} C_{l_b 0 \lambda 0}^{l_d 0} \times \\
& \times \left[ f_{n_a \kappa_a} f_{n_c \kappa_c} (-1)^{l_c} \hat{l}_c \begin{Bmatrix} l_a & 1/2 & j_a \\ j_c & \lambda & l_c \end{Bmatrix} - g_{n_a \kappa_a} g_{n_c \kappa_c} (-1)^{\bar{l}_c} \hat{\bar{l}}_c \begin{Bmatrix} \bar{l}_a & 1/2 & j_a \\ j_c & \lambda & \bar{l}_c \end{Bmatrix} \right] \times \\
& \times \left[ f_{n_b \kappa_b} f_{n_d \kappa_d} (-1)^{l_b} \hat{l}_b \begin{Bmatrix} l_d & 1/2 & j_d \\ j_b & \lambda & l_b \end{Bmatrix} - g_{n_b \kappa_b} g_{n_d \kappa_d} (-1)^{\bar{l}_b} \hat{\bar{l}}_b \begin{Bmatrix} \bar{l}_d & 1/2 & j_d \\ j_b & \lambda & \bar{l}_b \end{Bmatrix} \right].
\end{aligned} \tag{B.196}$$

### B.2.5 Kontaktni član

Kontaktni član Landau-Migdal interakcije dan je s [60]

$$V_{\delta\pi} = g' \left( \frac{f_{\pi}}{m_{\pi}} \right)^2 \boldsymbol{\tau}^{(1)} \boldsymbol{\tau}^{(2)} \boldsymbol{\Sigma}^{(1)} \boldsymbol{\Sigma}^{(2)} \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2). \tag{B.197}$$

Krećemo s računanjem odgovarajućeg matričnog elementa koji smo implementirali u kodu

$$\begin{aligned}
V_{abcd} = & \int dr_1 r_1^2 \int dr_2 r_2^2 \int drr^2 \int d\Omega_1 \int d\Omega_2 g' \left( \frac{f_{\pi}}{m_{\pi}} \right)^2 \sum_{\lambda\mu} \left[ \bar{\psi}_a(\mathbf{r}_1) \boldsymbol{\tau}^{(1)} \boldsymbol{\Sigma}^{(1)} \frac{\delta(r - r_1)}{rr_1} Y_{\lambda\mu}^*(\Omega_1) \psi_c(\mathbf{r}_1) \right] \times \\
& \times \left[ \bar{\psi}_c(\mathbf{r}_2) \boldsymbol{\tau}^{(2)} \boldsymbol{\Sigma}^{(2)} \frac{\delta(r - r_2)}{rr_2} Y_{\lambda\mu}(\Omega_2) \psi_d(\mathbf{r}_2) \right].
\end{aligned} \tag{B.198}$$

Koristili smo oznaku

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}. \tag{B.199}$$

Promotrimo prvu uglatu zagradu. Izospinski dio možemo izdvojiti iz valnih funkcija pa imamo

$$\begin{aligned}
& \xi_a^{\dagger} \boldsymbol{\tau}^{(1)} \xi_c \begin{pmatrix} f_{n_a \kappa_a}(r_1) \Omega_{\kappa_a m_a}^{\dagger}(\Omega_1) & -i g_{n_a \kappa_a}(r_1) \Omega_{\bar{\kappa}_a m_a}^{\dagger}(\Omega_1) \\ 0 & \boldsymbol{\sigma}^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}^{(1)} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma}^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{n_c \kappa_c}(r_1) \Omega_{\kappa_c m_c}(\Omega_1) \\ i g_{n_c \kappa_c}(r_1) \Omega_{\bar{\kappa}_c m_c}(\Omega_1) \end{pmatrix} T_{\lambda\mu}^*(\Omega_1) \\
& = \xi_a^{\dagger} \boldsymbol{\tau}^{(1)} \xi_c \left[ f_{n_a \kappa_a}(r) f_{n_c \kappa_c}(r) \Omega_{\kappa_a m_a}^{\dagger} \boldsymbol{\sigma}^{(1)} \Omega_{\kappa_c m_c} - g_{n_a \kappa_a} g_{n_c \kappa_c} \Omega_{\bar{\kappa}_a m_a}^{\dagger} \boldsymbol{\sigma}^{(1)} \Omega_{\bar{\kappa}_c m_c} \right] Y_{\lambda\mu}^*.
\end{aligned} \tag{B.200}$$

Promotrimo označeni kutni dio

$$\int d\Omega_1 \sum_{\substack{m_{l_a} m_s \\ m_{l_c} m_{s'}}} C_{sm_s l_a m_{l_a}}^{j_a m_a} C_{s' m_{s'} l_c m_{l_c}}^{j_c m_c} \chi_{sm_s} \boldsymbol{\sigma}^{(1)} \chi_{s' m_{s'}} Y_{l_a m_{l_a}}^* Y_{\lambda\mu}^* Y_{l_c m_{l_c}}. \tag{B.201}$$

Integral s kuglinim funkcijama je dan Gauntovom formulom

$$\int d\Omega_1 Y_{l_a m_{l_a}}^* Y_{\lambda \mu}^* Y_{l_c m_{l_c}} = \frac{\hat{l}_a \hat{\lambda}}{\sqrt{4\pi} \hat{l}_c} C_{l_a 0 \lambda 0}^{l_c 0} C_{l_a m_{l_a} \lambda \mu}^{l_c m_{l_c}}, \quad (\text{B.202})$$

dok za spinski dio ponovno koristimo trik (B.172) i prelazimo u bazu sferičnih tenzora za  $\sigma$  matrice

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \sum_{\nu} (-1)^{\nu} \sigma_{\nu} \sigma_{-\nu}, \quad (\text{B.203})$$

pa imamo

$$\chi_{sm_s}^{\dagger} \sigma_{\nu} \chi_{s'm_{s'}} = \sqrt{3} C_{1/2 m_{s'} 1 \nu}^{1/2 m_s}. \quad (\text{B.204})$$

To nam sve skupa za kutni dio daje

$$\begin{aligned} \int d\Omega_1 \Omega_{\kappa_a m_a}^{\dagger} \sigma_{\nu} \Omega_{\kappa_c m_c} Y_{\lambda \mu}^* &= \sum_{\substack{m_{l_a} m_s \\ m_{l_c} m_{s'}}} C_{sm_s l_a m_{l_a}}^{j_a m_a} C_{s' m_{s'} l_c m_{l_c}}^{j_c m_c} C_{l_a 0 \lambda 0}^{l_c 0} C_{l_a m_{l_a} \lambda \mu}^{l_c m_{l_c}} \frac{\hat{l}_a \hat{\lambda}}{\sqrt{4\pi} \hat{l}_c} \sqrt{3} C_{1/2 m_{s'} 1 \nu}^{1/2 m_s} \\ &= \frac{3}{4\pi} \frac{\hat{l}_a \hat{\lambda}}{\hat{l}_c} C_{l_a 0 \lambda 0}^{l_c 0} \sum_{\substack{m_{l_a} m_s \\ m_{l_c} m_{s'}}} C_{sm_s l_a m_{l_a}}^{j_a m_a} C_{s' m_{s'} l_c m_{l_c}}^{j_c m_c} C_{l_a m_{l_a} \lambda \mu}^{l_c m_{l_c}} C_{1/2 m_{s'} 1 \nu}^{1/2 m_s}, \end{aligned} \quad (\text{B.205})$$

Konačno sređivanjem, slično prethodnim slučajevima dobivamo

$$\int d\Omega_1 \Omega_{\kappa_a m_a}^{\dagger} \sigma_{\nu} \Omega_{\kappa_c m_c} Y_{\lambda \mu}^* = \frac{3}{4\pi} \hat{l}_a \hat{\lambda} \sqrt{2} \hat{j}_a C_{l_a 0 \lambda 0}^{l_c 0} (-1)^{1+\nu} \sum_{k\kappa} \hat{k} C_{1-\nu \lambda \mu}^{k\kappa} C_{j_a m_a k\kappa}^{j_c m_c} \begin{Bmatrix} j_c & 1/2 & l_c \\ j_a & 1/2 & l_a \\ k & 1 & \lambda \end{Bmatrix}. \quad (\text{B.206})$$

Drugi član u izrazu (B.200) se dobiva analogno i glasi<sup>1</sup>

$$\int d\Omega_1 \Omega_{\bar{\kappa}_a m_a}^{\dagger} \sigma_{\nu} \Omega_{\bar{\kappa}_c m_c} Y_{\lambda \mu}^* = \frac{3}{4\pi} \hat{l}_a \hat{\lambda} \sqrt{2} \hat{j}_a C_{\bar{l}_a 0 \lambda 0}^{\bar{l}_c 0} (-1)^{1+\nu} \sum_{k\kappa} \hat{k} C_{1-\nu \lambda \mu}^{k\kappa} C_{j_a m_a k\kappa}^{j_c m_c} \begin{Bmatrix} j_c & 1/2 & \bar{l}_c \\ j_a & 1/2 & \bar{l}_a \\ k & 1 & \lambda \end{Bmatrix}, \quad (\text{B.207})$$

---

<sup>1</sup>Faktor  $(-1)^{\nu}$  koji dolazi iz izraza (B.203) smo ubacili ovdje, pa se poništio s faktorom  $(-1)^{\nu}$  i dao  $(-1)$ .



pa kada kombiniramo oba člana konačno za prvu uglatu zagradu u izrazu (B.198)

$$\begin{aligned} \Rightarrow & -\xi_a^\dagger \tau^{(1)} \xi_c \sqrt{2} \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \hat{\lambda} \hat{j}_a C_{l_a 0 \lambda 0}^{l_c 0} \sum_{k\kappa} \hat{k} C_{1-\nu \lambda \mu}^{k\kappa} C_{j_a m_a k \kappa}^{j_c m_c} \times \\ & \times \left[ f_{n_a \kappa_a} f_{n_c \kappa_c} \hat{l}_a \begin{Bmatrix} j_c & 1/2 & l_c \\ j_a & 1/2 & l_a \\ k & 1 & \lambda \end{Bmatrix} - g_{n_a \kappa_a} g_{n_c \kappa_c} \hat{l}_a \begin{Bmatrix} j_c & 1/2 & \bar{l}_c \\ j_a & 1/2 & \bar{l}_a \\ k & 1 & \lambda \end{Bmatrix} \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.208})$$

Član u drugoj uglatoj zagradi u (B.198) se razlikuje po tome što umjesto  $\sigma_\nu$  ima  $\sigma_{-\nu}$ , te umjesto  $Y_{\lambda\mu}^*$ , ima  $Y_{\lambda\mu}$ . To vodi na sljedeći konačan izraz

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \xi_b^\dagger \tau^{(2)} \xi_d \sqrt{2} \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \hat{\lambda} \hat{j}_d C_{l_d 0 \lambda 0}^{l_b 0} \sum_{k\kappa} \hat{k} C_{1-\nu \lambda \mu}^{k\kappa} C_{j_d m_d k \kappa}^{j_b m_b} \times \\ & \times \left[ f_{n_b \kappa_b} f_{n_d \kappa_d} \hat{l}_d \begin{Bmatrix} j_b & 1/2 & l_b \\ j_d & 1/2 & l_d \\ k & 1 & \lambda \end{Bmatrix} - g_{n_b \kappa_b} g_{n_d \kappa_d} \hat{l}_d \begin{Bmatrix} j_b & 1/2 & \bar{l}_b \\ j_d & 1/2 & \bar{l}_d \\ k & 1 & \lambda \end{Bmatrix} \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.209})$$

Možemo napisati izraz za konačni matrični element

$$\begin{aligned} V_{abcd} = & \int dr r^2 \left( \frac{f_\pi}{m_\pi} \right)^2 g'^2 \sum_{\lambda\mu} \sum_{\nu} (-) \xi_a^\dagger \tau^{(1)} \xi_c \xi_b^\dagger \tau^{(2)} \xi_d \frac{3}{2\pi} \hat{\lambda}^2 \hat{j}_a \hat{j}_d C_{l_a 0 \lambda 0}^{l_c 0} C_{l_d 0 \lambda 0}^{l_b 0} \times \\ & \times \sum_{k\kappa} \hat{k} C_{1-\nu \lambda \mu}^{k\kappa} C_{j_a m_a k \kappa}^{j_c m_c} \left[ f_{n_a \kappa_a} f_{n_c \kappa_c} \hat{l}_a \begin{Bmatrix} j_c & 1/2 & l_c \\ j_a & 1/2 & l_a \\ k & 1 & \lambda \end{Bmatrix} - g_{n_a \kappa_a} g_{n_c \kappa_c} \hat{l}_a \begin{Bmatrix} j_c & 1/2 & \bar{l}_c \\ j_a & 1/2 & \bar{l}_a \\ k & 1 & \lambda \end{Bmatrix} \right] \times \\ & \times \sum_{k'\kappa'} \hat{k}' C_{1-\nu \lambda \mu}^{k'\kappa'} C_{j_d m_d k' \kappa'}^{j_b m_b} \left[ f_{n_b \kappa_b} f_{n_d \kappa_d} \hat{l}_d \begin{Bmatrix} j_b & 1/2 & l_b \\ j_d & 1/2 & l_d \\ k' & 1 & \lambda \end{Bmatrix} - g_{n_b \kappa_b} g_{n_d \kappa_d} \hat{l}_d \begin{Bmatrix} j_b & 1/2 & \bar{l}_b \\ j_d & 1/2 & \bar{l}_d \\ k' & 1 & \lambda \end{Bmatrix} \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.210})$$

Možemo iskoristiti relacije ortogonalnosti CG koeficijentata da dobijemo

$$\sum_{\nu\mu} C_{1-\nu \lambda \mu}^{k\kappa} C_{1-\nu \lambda \mu}^{k'\kappa'} = \delta_{kk'} \delta_{\kappa\kappa'}, \quad (\text{B.211})$$

pa se izraz (B.210) pojednostavljuje

$$\begin{aligned}
V_{abcd} = & \int dr r^2 \left( \frac{f_\pi}{m_\pi} \right)^2 g'^2 \sum_{\lambda\mu} \sum_{\nu} (-)^{\xi_a^\dagger \tau^{(1)} \xi_c \xi_b^\dagger \tau^{(2)} \xi_d} \frac{3}{2\pi} \hat{\lambda}^2 \hat{j}_a \hat{j}_d C_{l_a 0 \lambda 0}^{l_c 0} C_{l_d 0 \lambda 0}^{l_b 0} \times \\
& \times \sum_{k\kappa} \hat{k}^2 C_{j_a m_a k \kappa}^{j_c m_c} C_{j_d m_d k' \kappa'}^{j_b m_b} \left[ f_{n_a \kappa_a} f_{n_c \kappa_c} \hat{l}_a \begin{Bmatrix} j_c & 1/2 & l_c \\ j_a & 1/2 & l_a \\ k & 1 & \lambda \end{Bmatrix} - g_{n_a \kappa_a} g_{n_c \kappa_c} \hat{l}_a \begin{Bmatrix} j_c & 1/2 & \bar{l}_c \\ j_a & 1/2 & \bar{l}_a \\ k & 1 & \lambda \end{Bmatrix} \right] \times \\
& \times \left[ f_{n_b \kappa_b} f_{n_d \kappa_d} \hat{l}_d \begin{Bmatrix} j_b & 1/2 & l_b \\ j_d & 1/2 & l_d \\ k & 1 & \lambda \end{Bmatrix} - g_{n_b \kappa_b} g_{n_d \kappa_d} \hat{l}_d \begin{Bmatrix} j_b & 1/2 & \bar{l}_b \\ j_d & 1/2 & \bar{l}_d \\ k & 1 & \lambda \end{Bmatrix} \right].
\end{aligned} \tag{B.212}$$

Promotrimo sada vezani matrični element u ukupni angularni moment  $J$ , tada dobivamo dodatne faktore u gornjem izrazu

$$\sum_{m_a m_c} (-1)^{j_c - m_c} C_{j_a m_a j_c - m_c}^{JM} \sum_{m_b m_d} (-1)^{j_b - m_b} C_{j_d m_d j_b - m_b}^{JM}, \tag{B.213}$$

pa korištenjem relacija ortogonalnosti slijedi

$$\begin{aligned}
V_{abcd}^{JM} = & -(-1)^{j_a + j_b + j_c + j_d} \frac{3}{2\pi} \left( \frac{f_\pi}{m_\pi} \right)^2 g'^2 \hat{j}_a \hat{j}_b \hat{j}_c \hat{j}_d \xi_a^\dagger \tau^{(1)} \xi_c \xi_b^\dagger \tau^{(2)} \xi_d \sum_{\lambda} \hat{\lambda}^2 C_{l_a 0 \lambda 0}^{l_c 0} C_{l_d 0 \lambda 0}^{l_b 0} \times \\
& \times \int dr r^2 \left[ f_{n_a \kappa_a} f_{n_c \kappa_c} \hat{l}_a \begin{Bmatrix} j_c & 1/2 & l_c \\ j_a & 1/2 & l_a \\ J & 1 & \lambda \end{Bmatrix} - g_{n_a \kappa_a} g_{n_c \kappa_c} \hat{l}_a \begin{Bmatrix} j_c & 1/2 & \bar{l}_c \\ j_a & 1/2 & \bar{l}_a \\ J & 1 & \lambda \end{Bmatrix} \right] \times \\
& \times \left[ f_{n_b \kappa_b} f_{n_d \kappa_d} \hat{l}_d \begin{Bmatrix} j_b & 1/2 & l_b \\ j_d & 1/2 & l_d \\ J & 1 & \lambda \end{Bmatrix} - g_{n_b \kappa_b} g_{n_d \kappa_d} \hat{l}_d \begin{Bmatrix} j_b & 1/2 & \bar{l}_b \\ j_d & 1/2 & \bar{l}_d \\ J & 1 & \lambda \end{Bmatrix} \right].
\end{aligned} \tag{B.214}$$

Suma po  $\lambda$  se pojednostavljuje ako uključimo razmatranja prirodnog i neprirodnog pariteta. Prirodni paritet je definiran kao  $\pi = (-1)^J$  i u tom slučaju vrijedi  $\lambda = J$ , pa imamo samo jedan član u gornjoj sumi. Ukoliko imamo neprirodni paritet, zbog relacija neodređenosti trokuta za angularni moment mora vrijediti  $\lambda = J \pm 1$ .

### B.2.6 Izvod rezidualne interakcije sparivanja

Za kanal sparivanja u FT-RQRPA kodu koristimo oblik interakcije sličan Gogny interakciji sparivanja. Općeniti oblik dijela Gogny interakcije za sparivanje glasi [60]

$$V_{12} = \sum_{i=1,2} \exp \left[ -\frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^2}{\mu_i^2} \right] (W_i + B_i P^\sigma - H_i P^\tau - M_i P^\sigma P^\tau). \quad (\text{B.215})$$

$W_i, B_i, H_i, M_i, \mu_i$  su slobodni parametri, a  $P^\sigma, P^\tau$  predstavljaju operatore zamjene spinskih, odnosno izospinskih koordinata. Promotrimo kako djeluju operatori izmjene spina i izospina. Općenito vezanje spinskih koordinata u neki  $S$  je

$$|(1/21/2)SM_S\rangle = \sum_{m_s m'_s} C_{1/2m_s 1/2m'_s}^{SM_S} |1/2m_s\rangle |1/2m'_s\rangle. \quad (\text{B.216})$$

Kada djelujemo sa operatorom  $P^\sigma$  slijedi

$$P^\sigma |(1/21/2)SM_S\rangle = \sum_{m_s m'_s} C_{1/2m'_s 1/2m_s}^{SM_S} |1/2m_s\rangle |1/2m'_s\rangle, \quad (\text{B.217})$$

dakle dolazi do izmjene vezanja. Budući da za CG koeficijente vrijedi  $C_{1/2m'_s 1/2m_s}^{SM_S} = (-1)^{1-S} C_{1/2m_s 1/2m'_s}^{SM_S}$ , zaključujemo da zamjena spinskih koordinata inducira promjenu faze

$$P^\sigma |(1/21/2)SM_S\rangle = (-1)^{S-1} |(1/21/2)SM_S\rangle. \quad (\text{B.218})$$

Analogno vrijedi i za izospin, no budući da mi parove vezemo u  $T = 0$ , dolazi samo do promjene predznaka

$$P^\tau |(1/21/2)T = 0M_T = 0\rangle = -|(1/21/2)T = 0M_T = 0\rangle, \quad (\text{B.219})$$

pa se ne moramo brinuti oko izospinskog dijela u izvodima. Ovu analizu radimo jer je bitno zaključiti da operatori izmjene spina i izospina djeluju na vezana stanja !

Dovoljno je zadržati se na sljedećem obliku Gogny interakcije [60]

$$V_{12} = \sum_{i=1,2} V_i(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)(A_i + B_i P^\sigma), \quad (\text{B.220})$$

gdje je  $V_i(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) = \exp \left[ -\frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^2}{\mu_i^2} \right]$ . Prvo promotrimo matrični element u nevezanoj bazi

$$\langle s_a l_a j_a m_a s_b l_b j_b m_b | V_{12} | s_c l_c j_c m_c s_d l_d j_d m_d \rangle. \quad (\text{B.221})$$

Za vezanje u LS-shemi vrijedi

$$|(s_a s_b)SM_S(l_a l_b)LM_L\rangle = \sum_{m_s m'_s} C_{s_a m_s s_b m'_s}^{SM_S} \sum_{m_{l_a} m_{l_b}} C_{l_a m_{l_a} l_b m_{l_b}}^{LM_L} |s_a m_s l_a m_{l_a}\rangle |s_b m'_s l_b m_{l_b}\rangle. \quad (\text{B.222})$$

Cilj nam je prijeći iz jj-vezanja u LS-vezanje, kako bi mogli djelovati operatorom izmjene spina [59]. Imamo

$$\begin{aligned} V_{abcd} = & \sum_{\substack{m_s m_{l_a} \\ m'_s m_{l_b}}} C_{1/2 m_s l_a m_{l_a}}^{j_a m_a} C_{1/2 m'_s l_b m_{l_b}}^{j_b m_b} \sum_{LM_L} C_{1/2 m_s 1/2 m'_s}^{SM_S} C_{l_a m_{l_a} l_b m_{l_b}}^{LM_L} \langle (1/21/2)SM_S(l_a l_b)LM | \times \\ & \times V_{12} \sum_{\substack{m''_s m_{l_c} \\ m'''_s m_{l_d}}} C_{1/2 m''_s l_c m_{l_c}}^{j_c m_c} C_{1/2 m'''_s l_d m_{l_d}}^{j_d m_d} \sum_{\substack{S' M'_S \\ L' M'_L}} C_{1/2 m''_s 1/2 m'''_s}^{S' M'_S} C_{l_c m_{l_c} l_d m_{l_d}}^{L' M'_L} | (1/21/2)S' M'_S(l_c l_d)L' M'_L \rangle. \end{aligned} \quad (\text{B.223})$$

U gornjem izrazu CG koeficijente možemo grupirati u 9j-simbole koristeći vezanja iz [47]

$$\sum_{\substack{m_s m_{l_a} \\ m'_s m_{l_b}}} C_{1/2 m_s l_a m_{l_a}}^{j_a m_a} C_{1/2 m'_s l_b m_{l_b}}^{j_b m_b} C_{1/2 m_s 1/2 m'_s}^{SM_S} C_{l_a m_{l_a} l_b m_{l_b}}^{LM_L} = \sum_{k\kappa} \hat{j}_b \hat{S} \hat{L} \hat{j}_a C_{SM_S LM_L}^{k\kappa} C_{j_a m_a j_b m_b}^{k\kappa} \begin{Bmatrix} l_b & 1/2 & j_b \\ l_a & 1/2 & j_a \\ L & S & k \end{Bmatrix}. \quad (\text{B.224})$$

Konačno za matrični element u LS-shemi vezanja imamo

$$\begin{aligned} V_{abcd} = & \hat{j}_a \hat{j}_b \hat{j}_c \hat{j}_d \sum_{\substack{LM_L \\ L' M'_L}} \sum_{\substack{SM_S \\ S' M'_S}} \hat{S} \hat{S}' \hat{L} \hat{L}' \sum_{k\kappa} C_{SM_S LM_L}^{k\kappa} C_{j_a m_a j_b m_b}^{k\kappa} \sum_{k'\kappa'} C_{S' M'_S L' M'_L}^{k'\kappa'} C_{j_c m_c j_d m_d}^{k'\kappa'} \times \\ & \times \langle (1/21/2)SM_S(l_a l_b)LM_L | V_{12} | (1/21/2)S' M'_S(l_c l_d)L' M'_L \rangle \begin{Bmatrix} l_b & 1/2 & j_b \\ l_a & 1/2 & j_a \\ L & S & k \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} l_d & 1/2 & j_d \\ l_c & 1/2 & j_c \\ L' & S' & k \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{B.225})$$

Matrični element vezemo u  $JM$  te iskoristimo relacije ortogonalnosti

$$\sum_{m_a m_b} C_{j_a m_a j_b m_b}^{k\kappa} C_{j_a m_a j_b m_b}^{JM} = \delta_{Jk} \delta_{M\kappa}, \quad (\text{B.226})$$

pa konačno za matrični element imamo

$$\begin{aligned}
V_{abcd}^{JM} &= \hat{j}_a \hat{j}_b \hat{j}_c \hat{j}_d \sum_{\substack{LM_L \\ L'M'_L}} \sum_{\substack{SM_S \\ S'M'_S}} \hat{S} \hat{S}' \hat{L} \hat{L}' C_{SM_S LM_L}^{JM} C_{S'M'_S L'M'_L}^{JM} \times \\
&\times \langle (1/21/2) SM_S(l_a l_b) LM_L | V_{12} | (1/21/2) S' M'_S(l_c l_d) L' M'_L \rangle \left\{ \begin{matrix} l_b & 1/2 & j_b \\ l_a & 1/2 & j_a \\ L & S & J \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} l_d & 1/2 & j_d \\ l_c & 1/2 & j_c \\ L' & S' & J \end{matrix} \right\}.
\end{aligned} \tag{B.227}$$

U gornjem izrazu možemo još napraviti i vezanje

$$|(1/21/2) SM_S(l_a l_b) LM_L; JM\rangle = \sum_{M_S M_L} C_{SM_S LM_L}^{JM} |(1/21/2) SM_S(l_a l_b) LM_L\rangle, \tag{B.228}$$

pa imamo

$$\begin{aligned}
V_{abcd}^{JM} &= \hat{j}_a \hat{j}_b \hat{j}_c \hat{j}_d \sum_{LL'} \sum_{SS'} \hat{S} \hat{S}' \hat{L} \hat{L}' \langle (1/21/2) SM_S(l_a l_b) LM_L | V_{12} | (1/21/2) S' M'_S(l_c l_d) L' M'_L \rangle \times \\
&\times \left\{ \begin{matrix} l_b & 1/2 & j_b \\ l_a & 1/2 & j_a \\ L & S & J \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} l_d & 1/2 & j_d \\ l_c & 1/2 & j_c \\ L' & S' & J \end{matrix} \right\}.
\end{aligned} \tag{B.229}$$

$V_{12}$  je potrebno rastaviti po multipolima i to kao [59]

$$\exp \left[ -\frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^2}{\mu_i^2} \right] = \exp \left[ -\frac{r_1^2 + r_2^2}{\mu_i^2} \right] \exp \left[ \frac{2\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2}{\mu_i} \right] \tag{B.230}$$

$$= 4\pi \exp \left[ -\frac{r_1^2 + r_2^2}{\mu_i^2} \right] \sum_{\lambda\mu} i_\lambda \left( \frac{2r_1 r_2}{\mu_i} \right) Y_{\lambda\mu}^*(\Omega_1) Y_{\lambda\mu}(\Omega_2), \tag{B.231}$$

gdje je  $i_\lambda(kr)$  modificirana sferična Besselova funkcija.

## Literatura

- [1] H. Burbidge, Burbidge, Synthesis of the Elements in Stars, *Rev. Mod. Phys.*, 29, 547 (1957).
- [2] C. Rolfs, W. Rodney, *Cauldrons in the Cosmos: Nuclear Astrophysics*, Theoretical Astrophysics, University of Chicago Press (1988), ISBN 9780226724577.
- [3] H. A. Bethe, Supernova mechanisms, *Rev. Mod. Phys.*, 62, 801 (1990).
- [4] G. Martínez-Pinedo, Selected topics in Nuclear Astrophysics, *Eur. Phys. J. Special Topics*, 156, 123 (2008).
- [5] X. spektar: NASA/CXC/PSU/S.Park i D.Burrows. ; Optički: NASA/ST-ScI/CfA/P.Challis, Slika supernove SN1987A, <http://chandra.si.edu/photo/2017/sn1987a/more.html>, [Na web-u; pristupljeno 4. svibnja 2019.].
- [6] K. Langanke, G. Martínez-Pinedo, Nuclear weak-interaction processes in stars, *Rev. Mod. Phys.*, 75, 819 (2003).
- [7] H.-T. Janka, K. Langanke, A. Marek, G. Martínez-Pinedo, B. Müller, Theory of core-collapse supernovae, *Physics Reports*, 442(1), 38 (2007), the Hans Bethe Centennial Volume 1906-2006.
- [8] K. Langanke, E. Kolbe, D. J. Dean, Unblocking of the Gamow-Teller strength in stellar electron capture on neutron-rich germanium isotopes, *Phys. Rev. C*, 63, 032801 (2001).
- [9] A. Vdovin, A. Dzhioev, V. Yu, P. , J. Wambach, Beta-decay and electron capture rates for hot nuclei, *2nd International Conference on Current Problems in Nuclear Physics and Atomic Energy, NPAE 2008 - Proceedings* (2009).
- [10] G. M. Fuller, W. A. Fowler, M. J. Newman, Stellar weak-interaction rates for sd-shell nuclei. I - Nuclear matrix element systematics with application to  $^{26}\text{Al}$  and selected nuclei of importance to the supernova problem, *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 42, 447 (1980).
- [11] G. M. Fuller, W. A. Fowler, M. J. Newman, Stellar weak interaction rates for intermediate-mass nuclei. II -  $A = 21$  to  $A = 60$ , *The Astrophysical Journal*, 252, 715 (1981).

- [12] G. M. Fuller, W. A. Fowler, M. J. Newman, Stellar weak interaction rates for intermediate mass nuclei. III - Rate tables for the free nucleons and nuclei with  $A = 21$  to  $A = 60$ , *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 48, 279 (1982).
- [13] G. M. Fuller, W. A. Fowler, M. J. Newman, Stellar weak interaction rates for intermediate-mass nuclei. IV - Interpolation procedures for rapidly varying lepton capture rates using effective  $\log(ft)$ -values, *The Astrophysical Journal*, 293, 1 (1985).
- [14] K. L. G. Martínez-Pinedo, Rate tables for the weak processes of pf-shell nuclei in stellar environments, *Atomic Data and Nuclear Data Tables*, 79(1), 1 (2001).
- [15] A. Juodagalvis, K. Langanke, W. Hix, G. Martínez-Pinedo, J. Sampaio, Improved estimate of electron capture rates on nuclei during stellar core collapse, *Nuclear Physics A*, 848, 454 (2009).
- [16] Y. Niu, N. Paar, D. Vretenar, J. Meng, Stellar electron-capture rates calculated with the finite-temperature relativistic random-phase approximation, *Phys. Rev. C*, 83, 045807 (2011).
- [17] T. Nikšić, N. Paar, D. Vretenar, P. Ring, DIRHB—A relativistic self-consistent mean-field framework for atomic nuclei, *Computer Physics Communications*, 185(6), 1808 (2014).
- [18] P. Ring, *Concept of covariant density functional theory*, 1–20 (2016), ISBN 978-981-4733-25-0.
- [19] D. P. Arteaga, *Relativistic Quasiparticle Random Phase Approximation in Deformed Nuclei*, Ph.D. thesis, Technische Universität München (2007).
- [20] P. Ring, Relativistic mean field theory in finite nuclei, *Progress in Particle and Nuclear Physics*, 37, 193 (1996).
- [21] Y. Gambhir, P. Ring, A. Thimet, Relativistic mean field theory for finite nuclei, *Annals of Physics*, 198(1), 132 (1990).
- [22] S. Typel, H. Wolter, Relativistic mean field calculations with density-dependent meson-nucleon coupling, *Nuclear Physics A*, 656(3), 331 (1999).
- [23] T. Nikšić, D. Vretenar, P. Finelli, P. Ring, Relativistic Hartree-Bogoliubov model with density-dependent meson-nucleon couplings, *Phys. Rev. C*, 66, 024306 (2002).
- [24] M. Abramowitz, I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions: With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, Applied mathematics series, Dover Publications (1965), ISBN 9780486612720.

- [25] P. Ring, P. Schuck, *The Nuclear Many-Body Problem*, Physics and astronomy online library, Springer, Heidelberg (2004), ISBN 9783540212065.
- [26] K. Heyde, *The Nuclear Shell Model: Study Edition*, Springer Berlin Heidelberg (2013), ISBN 9783642790522.
- [27] J. Bardeen, L. N. Cooper, J. R. Schrieffer, Microscopic Theory of Superconductivity, *Phys. Rev.*, 106, 162 (1957).
- [28] A. L. Goodman, Finite-temperature HFB theory, *Nuclear Physics A*, 352(1), 30 (1981).
- [29] E. Yüksel, E. Khan, K. Bozkurt, G. Colò, Effect of temperature on the effective mass and the neutron skin of nuclei, *European Physical Journal A*, 50, 160 (2014).
- [30] S. Changizi, C. Qi, R. Wyss, Empirical pairing gaps, shell effects, and di-neutron spatial correlation in neutron-rich nuclei, *Nuclear Physics A*, 940, 210 (2015).
- [31] M. Bender, K. Rutz, P. G. Reinhard, J. A. Maruhn, Pairing gaps from nuclear mean-field models, *Eur. Phys. J. A*, 8(1), 59 (2000).
- [32] P. Ring, Z.-Y. Ma, N. V. Giai, D. Vretenar, A. Wandelt, L.-G. Cao, The time-dependent relativistic mean-field theory and the random phase approximation, *Nuclear Physics A*, 694(1), 249 (2001).
- [33] Z.-Y. Ma, A. Wandelt, N. Van Giai, D. Vretenar, P. Ring, L.-G. Cao, Collective multipole excitations in a microscopic relativistic approach, *Nuclear Physics A*, 703 (2001).
- [34] H. Liang, *Nuclear Charge-Exchange Excitations in a Self-Consistent Covariant Approach*, Ph.D. thesis, Université Paris Sud (2010).
- [35] T. Nikšić, D. Vretenar, P. Ring, Relativistic Random-Phase Approximation with density-dependent meson-nucleon couplings, *Physical Review C*, 66 (2002).
- [36] M. L’Huillier, N. Van Giai, Isoscalar giant resonances in a relativistic model, *Phys. Rev. C*, 39, 2022 (1989).
- [37] P. G. Blunden, P. McCorquodale, Random phase approximation for light nuclei based on fully relativistic Hartree-Fock calculations, *Phys. Rev. C*, 38, 1861 (1988).
- [38] H. Sommermann, Microscopic description of giant resonances in highly excited nuclei, *Annals of Physics*, 151(1), 163 (1983).



- [39] E. Yüksel, G. Colò, E. Khan, Y. Niu, K. Bozkurt, Multipole excitations in hot nuclei within the finite temperature quasiparticle random phase approximation framework, *Physical Review C*, 96 (2017).
- [40] N. Paar, T. Nikšić, D. Vretenar, P. Ring, Quasiparticle random phase approximation based on the relativistic Hartree-Bogoliubov model. II. Nuclear spin and isospin excitations, *Phys. Rev. C*, 69, 054303 (2004).
- [41] J. Walecka, *Theoretical Nuclear and Subnuclear Physics: Second Edition*, Theoretical Nuclear and Subnuclear Physics, Imperial College Press (2004), ISBN 9789813102170.
- [42] V. Hughes, *Muon Physics V2: Weak Interactions*, Elsevier Science (2012), ISBN 9780323151979.
- [43] J. P. Ellis, TikZ-Feynman: Feynman diagrams with TikZ, *Computer Physics Communications*, 210, 103 (2017).
- [44] J. Walecka, *Electron Scattering for Nuclear and Nucleon Structure*, Cambridge Monographs on Particle Physics, Nuclear Physics and Cosmology, Cambridge University Press (2001), ISBN 9781139429979.
- [45] J. S. O'Connell, T. W. Donnelly, J. D. Walecka, Semileptonic Weak Interactions with  $^{12}\text{C}$ , *Phys. Rev. C*, 6, 719 (1972).
- [46] S. Weinberg, Charge Symmetry of Weak Interactions, *Phys. Rev.*, 112, 1375 (1958).
- [47] D. A. Varshalovich, A. N. Meskalev, V. K. Khersonskii, *Quantum Theory Of Angular Momentum*, World Scientific Publishing Company (1988), ISBN 9789814578288.
- [48] A. F. Fantina, E. Khan, G. Colò, N. Paar, D. Vretenar, Stellar electron-capture rates on nuclei based on Skyrme functionals, *Physical Review C*, 86 (2012).
- [49] G. K. Schenter, P. Vogel, A Simple Approximation of the Fermi Function in Nuclear Beta Decay, *Nuclear Science and Engineering*, 83(3), 393 (1983).
- [50] A. Juodagalvis, K. Langanke, W. Hix, G. Martínez-Pinedo, J. Sampaio, Improved estimate of electron capture rates on nuclei during stellar core collapse, *Nuclear Physics A*, 848, 454 (2009).
- [51] N. I. et. al., Electrical and Thermal Conductivities of Dense Matter in the Crystalline Lattice Phase, *The Astrophysical Journal* (1984).

- [52] N. Itoh, N. Tomizawa, M. Tamamura, S. Wanajo, S. Nozawa, Screening Corrections to the Electron Capture Rates in Dense Stars by the Relativistically Degenerate Electron Liquid, *The Astrophysical Journal*, 579(1), 380 (2002).
- [53] W. Press, J. Wevers, B. Flannery, C. U. Press, S. Teukolsky, W. Vetterling, N. R. Software, W. Vetterling, B. Flannery, *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing*, number s. 1 in Numerical Recipes in C book set, Cambridge University Press (1992), ISBN 9780521431088.
- [54] NDS-IAEA, Live Chart of Nuclides, <https://www-nds.iaea.org/relnsd/vcharthtml/VChartHTML.html>, [Na web-u; pristupljeno 6. svibnja 2019.].
- [55] E. Yüksel, N. Paar, G. Colò, E. Khan, Y. F. Niu, Gamow-Teller excitations at finite temperature: competition between pairing and temperature effects, neobjavljeno.
- [56] D. Griffiths, *Introduction to Elementary Particles*, Wiley, Weinheim (2008), ISBN 9783527618477.
- [57] A. Fetter, J. Walecka, *Quantum Theory of Many-particle Systems*, Dover Books on Physics, Dover Publications (2003), ISBN 9780486428277.
- [58] T. Donnelly, W. Haxton, Multipole operators in semileptonic weak and electromagnetic interactions with nuclei: Harmonic oscillator single-particle matrix elements, *Atomic Data and Nuclear Data Tables*, 23(2), 103 (1979).
- [59] D. Vale, Bilješke tijekom doktorskog studija, neobjavljeno.
- [60] N. Paar, *Relativistic Mean-Field Description of Exotic Excitations in Finite Nuclei*, Ph.D. thesis, Technische Universität München (2003).